Klausurteil Differenzialgleichungen Dr. T. Wenisch erreichbar: 20 Punkte

Name, Vorname: **Punkte:**

Matr.-Nr.: **Studienfach:**

1. Gegeben ist die Differenzialgleichung: $\boldsymbol{xy' + y = 4x^3 - 2x^2}$ (10)

   a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung.

   b) Bestimmen Sie die spezielle Lösung für das Anfangswertproblem:

      $y(-1) = -3$

2. Gegeben ist die Differenzialgleichung: $\boldsymbol{y'' - 4y' + 5y = e^{2x}}$ (10)

   a) Bestimmen Sie zunächst die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen DGL

   b) Lösen Sie nun die angegebene DGL.

   c) Lösen Sie das Anfangswertproblem $y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$

Lösungen:

1. a) Lösung der homogenen DGL $y_0 = \frac{C}{x}$

Variation der Konstanten für die inhomogene DGL, Ansatz $y = \frac{K(x)}{x}$

ergibt $K_{(x)} = x^4 - \frac{2}{3}x^3 + c$ und damit $y_0 = x^3 - \frac{2}{3}x^2 + \frac{C}{x}$

b) $y(-1) = -3 \quad \rightarrow \quad C = \frac{4}{3}$

$y_p = x^3 - \frac{2}{3}x^2 + \frac{4}{3x}$

2. a) $\lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0$ hat die komplexen Lösungen $\lambda_{1,2} = 2 \pm i$

damit ist die allgem. Lsg.

$y_0 = e^{2x}(C_1 \sin(x) + C_2\, Cos(x))$

b) wir suchen eine partikuläre Lösung und wählen entprechend des Störgliedes den Ansatz $y_p = A\, e^{2x}$

Einsetzen von y_p , y_p' und y_p'' in die DGL ergibt A = 1

$y = y_0 + y_p = e^{2x}(C_1 \sin(x) + C_2\, Cos(x)) + e^{2x}$

$y = e^{2x}(C_1 \sin(x) + C_2\, Cos(x) + 1)$

c) $y(0) = 1 \quad \rightarrow \quad C_2 + 1 = 1 \rightarrow \quad C_2 = 0$

$y'(0) = 1 \quad \rightarrow \quad C_1 = -2$

$y = -2e^{2x}\sin(x) + e^{2x} = e^{2x}(1 - 2\sin(x))$