

1. Lösen Sie die Anfangswertprobleme:

a) $y' + \cos(x) \cdot y = 0 \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\pi$

b) $x^2 y' = y^2 + xy \quad y_{(1)} = -1$

c) $xy' + y = \ln(x) \quad y_{(1)} = 1$

2. Der radioaktive Zerfall wird durch die DGL $dn/dt = -\lambda n$ beschrieben.
 $n = n(t)$ ist die Zahl der Atomkerne zur Zeit t , λ die positive Zerfallskonstante.
 Radioaktive Stoffe sollen eingelagert werden, bis 99.99% des Materials zerfallen ist.
 Wie lange muß Pu-239 mit einer Halbwertszeit von 24360 Jahren eingelagert werden ?

3. Die Sinkgeschwindigkeit v eines Teilchens der Masse m in einer Flüssigkeit wird beschrieben durch die Differenzialgleichung

$$m \frac{dv}{dt} + kv = mg$$

Dabei ist k der Reibungsfaktor und g die Erdbeschleunigung.

- Bestimmen Sie die allgemeine Lösung durch Trennung der Variablen.
- Bestimmen Sie die spezielle Lösung für die Anfangsbedingung $v_{(0)} = v_0$
- Welche maximale Geschwindigkeit v_{\max} kann das Teilchen erreichen?

Lösungen:

1. a) Trennung der Variablen

allgemeine Lösung $y = C \cdot e^{-\sin(x)}$

spezielle Lösung $y_p = 2\pi \cdot e^{1-\sin(x)}$

b) Substitution $u = \frac{y}{x}$

allgemeine Lösung $y = -\frac{x}{\ln|cx|}$

spezielle Lösung $y_p = y = -\frac{x}{\ln|ex|}$

d) Variation der Konstanten

allgemeine Lösung $y = \frac{C}{x} + \ln(x) - 1$

spezielle Lösung $y_p = \frac{2}{x} + \ln(x) - 1$

2. 323689 Jahre

3. a) $v_{(t)} = C \cdot e^{-\frac{k}{m}t} + \frac{mg}{k}$

b) $v_{p(t)} = \left(v_0 - \frac{mg}{k}\right) \cdot e^{-\frac{k}{m}t} + \frac{mg}{k}$

c) $v_{\max} = \lim_{t \rightarrow \infty} v_{p(t)} = \frac{mg}{k}$