1. Gegeben ist die homogene Differenzialgleichung 2. Ordnung: $y'' - 4y' + 4y = 0$

   Zeigen Sie, dass $y_1(x) = e^{2x}$ und $y_2(x) = x \cdot e^{2x}$ eine Fundamentalbasis der DGL ist

2. Lösen Sie die folgenden homogenen Differentialgleichungen 2 Ordnung

   a) $y'' + 2y' - 3y = 0$

   b) $2y'' + 20y' + 50\,y = 0$

   c) $y'' - 2y' + 10y = 0$

3. Lösen Sie das Anfangswertproblem

   $y'' + 20y' + 64y = 0 \qquad y(0) = 0 \qquad y'(0) = 2$

4. Ein langes biegsames Seil der Länge l und der Masse m gleitet reibungsfrei über eine Tischkante. x=x(t) ist die Länge des überhängenden Seiles zur Zeit t. Die Kraft ist gleich der Gewichtskraft des überhängenden Seiles (x/l)mg (g=Erdbeschleunigung).
   Die Bewegung wird durch folgende Differenzialgleichung beschrieben:

   $$m\ddot{x} = \frac{x}{l}mg$$

   a) Lösen Sie die DGL für ein 1,50m langes Seil, das sich aus der Ruhe heraus in Bewegung setzt und zu Beginn bei t=0 zur Hälfte überhängt.
   b) Nach welcher Zeit ist das Seil abgerutscht.

Lösungen:

1. Zeigen Sie zunächst durch Einsetzen in die DGL, dass beide Funktionen Lösungen der DGL sind. Dann zeigen Sie, dass die Wronski-Determinante $W(y_1; y_2) = e^{4x} \neq 0$

2. a) $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -3$; $y_0 = C_1 e^{x} + C_2 e^{-3x}$

   b) $\lambda_{1,2} = -5$; $y_0 = (C_1 x + C_2)\ e^{-5x}$

   c) $\lambda_{1,2} = 1 \pm 3i \qquad y_0 = e^{x}(\,C_1 \sin(3x) + C_2 \cos(3x)\,)$

3. $\lambda_1 = -4$, $\lambda_2 = -16$; $y_0 = C_1 e^{-4x} + C_2 e^{-16x}$

   spezielle Lösung

   $y_s = \frac{1}{6}(e^{-4x} - e^{-16x})$

4. Die DGL $\ddot{x} - \frac{g}{l}x = 0$ wird nach Einsetzen der Zahlenwerte zu $\ddot{x} - 6{,}54\,x = 0$

   a) allg. Lsg.: $x = C_1 \cdot e^{2{,}5573\,t} + C_2 \cdot e^{-2{,}5573\,t}$

   spezielle Lsg.: $x = 0{,}375\,(e^{2{,}5573\,t} + e^{-2{,}5573\,t}) = 0{,}75 \cdot \cosh(2{,}5573\,t)$

   b) $x(T) = 1{,}5 \quad \Rightarrow \quad T = \frac{\text{arccosh}(2)}{2{,}5573} = 0{,}515 \qquad$ 0,515 s