1. Lösen Sie die folgenden Anfangswertprobleme
   a) $y'' + 4y' + 5y = 0 \qquad y(0) = \pi \qquad y'(0) = 0$
   b) $4\ddot{x} - 4\dot{x} + x = 0 \qquad x(0) = 5 \qquad \dot{x}(0) = -1$

2. Lösen Sie die folgenden inhomogenen Differentialgleichungen 2 Ordnung
   a) $y'' + 2y' - 3y = 3x^2 - 4x$
   b) $\ddot{x} + 10\dot{x} + 25x = 3\cos(5t)$

3. Lösen Sie das Anfangswertproblem
   $y'' + 2y' + 3y = e^{-2x} \qquad y(0) = 0 \qquad y'(0) = 1$

4. Eine freie, gedämpfte Schwingung werde beschrieben durch die Differenzialgleichung:
   $\ddot{x} + p\dot{x} + 2x = 0$ (p>0)
   a) Bestimmen Sie den Parameter p so, dass der aperiodische Grenzfall eintritt.
   b) Ermitteln Sie die spezielle Lösung der DGL für den aperiodischen Grenzfall aus a) mit den Anfangsbedingungen $x(0) = 10$ und $\dot{x}(0) = -1$.

Lösungen:

1. a) $\lambda_{1/2} = -2 \pm i \qquad y_0 = (C_1\sin(x) + C_2\cos(x))e^{-2x}$
   spezielle Lösung $y = (2\sin(x) + \cos(x))\,\pi\, e^{-2x}$
   b) $\lambda_{1/2} = 0{,}5 \qquad x_0 = (C_1 t + C_2)\ e^{0{,}5t}$
   spezielle Lösung $x = (-3{,}5t + 5)\ e^{0{,}5t}$

2. a) $y_0 = C_1e^x + C_2e^{-3x} \quad y_p = ax^2 + bx + c \quad \Rightarrow \quad y_p = -x^2 - \frac{2}{3}$
   $y = y_0 + y_p = C_1e^x + C_2e^{-3x} - x^2 - \frac{2}{3}$
   b) $x_0 = (C_1 t + C_2)\ e^{-5t} \quad y_p = Asin(5t) + Bcos(5t) \quad \Rightarrow \quad y_p = \frac{3}{50}\sin(5t)$
   $y = y_0 + y_p = (C_1 t + C_2)\ e^{-5t} + \frac{3}{50}\sin(5t)$

3. $y_0 = \left(C_1\sin(\sqrt{2}\,x) + C_2\cos(\sqrt{2}\,x)\right) e^{-x} \qquad y_p = \frac{1}{3}e^{-2x}$
   $y = y_0 + y_p = \left(C_1\sin(\sqrt{2}\,x) + C_2\cos(\sqrt{2}\,x)\right) e^{-x} + \frac{1}{3}e^{-2x}$
   spezielle Lösung
   $y = \left(\frac{2}{3}\sqrt{2}\sin(\sqrt{2}\,x) - \frac{1}{3}\cos(\sqrt{2}\,x)\right) e^{-x} + \frac{1}{3}e^{-2x}$

4. a) Der aperiodische Grenzfall tritt ein, wenn die chakteristische Gleichung
   $\lambda^2 + p\lambda + 2 = 0$ nur eine Lösung hat. $\lambda_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - 2} \qquad \frac{p^2}{4} - 2 = 0 \Rightarrow \quad p = 2\sqrt{2}$
   b) allgemeine Lösung $x_0 = (C_1 t + C_2)e^{-\sqrt{2}\,t}$
   spezielle Lösung $x = [(10\sqrt{2}] - 1)t + 10)e^{-\sqrt{2}\,t}$