

Produktintegration, Substitution, Partialbruchzerlegung:

1.

Ermittle eine Stammfunktion F zu f.

- a) $f(x) = x \cdot e^{x^2}$ d) $f(x) = (1-4x)^3$ g) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$ j) $f(x) = \frac{x}{(1-x^2)^3}$
- b) $f(x) = x^2 e^{-x^3}$ e) $f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$ h) $f(x) = \frac{x^2}{(x^3-1)^2}$ k) $f(x) = \frac{1}{x \cdot (\ln x)^3}$
- c) $f(t) = a \sin(\omega t)$ f) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2-3x}}$ i) $f(x) = \frac{x+\frac{1}{2}}{\sqrt{x^2+x}}$ l) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 \cdot \ln x}}$

2.

Ermittle eine Stammfunktion F zu f. (Logarithmische Integration)

- a) $f(x) = \frac{1}{x+3}$ c) $f(x) = \frac{x^2}{x^3-1}$ e) $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ g) $f(x) = \frac{1}{1-e^{-x}}$
- b) $f(x) = \frac{x^2+x}{x^3+1,5x^2+1}$ d) $f(x) = \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$ f) $f(x) = \frac{1}{x \cdot \ln x}$ h) $f(x) = \frac{1}{1+e^{-kx}}$

3.

Ermittle eine Stammfunktion F zu f.

- a) $f(x) = \frac{1}{(x-4)(x+1)}$ b) $f(x) = \frac{3x}{x^2+x-2}$ c) $f(x) = \frac{2x^2-x}{x^3+2x^2+x+2}$ d) $f(x) = \frac{7-3x}{(x-1)^2(x+3)}$

4.

Bestimme eine Stammfunktion F zur Integrandenfunktion, und berechne das Integral.

- a) $\int_{-1}^0 (x-2) \cdot e^x dx$ b) $\int_1^2 (3-x) \cdot e^{2-x} dx$ c) $\int_0^1 x^2 \cdot e^{-x} dx$ d) $\int_1^2 (\ln x)^2 dx$

5.

Berechne das Integral.

- a) $\int_0^1 3x^2(x^3+1)^2 dx$ e) $\int_{e^{-2}}^{e^{-1}} \frac{1}{x \cdot (\ln x)^2} dx$ i) $\int_{-1}^0 \frac{x^4-3x^3+4x^2-5x+5}{x^3-x^2+x-1} dx$ m) $\int_0^1 \frac{x^3}{x^3+1} dx$
- b) $\int_{-1}^0 \frac{-x}{x+1} dx$ f) $\int_1^2 \frac{5}{x^2-x-6} dx$ j) $\int_e^{e^2} \frac{1}{x \cdot \ln x} dx$ n) $\int_2^3 \frac{x^3-3x}{x^2-1} dx$
- c) $\int_0^1 \frac{x^2}{(x^3+1)^2} dx$ g) $\int_{-3}^{-2} \frac{2x-1}{x^2-x-1} dx$ k) $\int_0^{\ln 2} \frac{e^x}{e^x+1} dx$ o) $\int_0^1 \frac{x^3+5x^2-5}{x+5} dx$
- d) $\int_0^{\ln 3} \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} dx$ h) $\int_1^2 \frac{x+1}{x^3+2x^2} dx$ l) $\int_0^3 \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}} dx$ p) $\int_2^3 \frac{x^2-x+1}{x^4-1} dx$

Lösungen:

- 1. a) $F(x) = \frac{1}{2} e^{x^2}$ g) $F(x) = \sqrt{x^2-1}$
- b) $F(x) = -\frac{1}{3} e^{-x^3}$ h) $F(x) = -\frac{1}{3(x^3-1)}$
- c) $F(t) = -\frac{a}{\omega} \cos(\omega t)$ i) $F(x) = \sqrt{x^2+x}$
- d) $F(x) = -\frac{1}{16} (1-4x)^4$ j) $F(x) = \frac{-1}{4(x^2-1)^2}$
- e) $F(x) = -\frac{1}{x-1}$ k) $F(x) = -\frac{1}{2(\ln x)^2}$
- f) $F(x) = -\frac{2}{3} \sqrt{2-3x}$ l) $F(x) = 2\sqrt{\ln x}$
- 2. a) $F(x) = \ln(x+3)$ b) $F(x) = \frac{1}{3} \ln(x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 1)$
- c) $F(x) = \frac{1}{3} \ln(x^3-1)$ d) $F(x) = \ln\left(\frac{e^x}{e^x+1}\right) = -\ln(1+e^{-x})$
- e) $F(x) = \ln(e^x+e^{-x})$ g) $F(x) = \ln(e^x-1)$
- f) $F(x) = \ln(\ln x)$ h) $F(x) = \frac{1}{k} \ln(e^{kx} + 1)$
- 3. a) $F(x) = \frac{1}{5} \ln(x-4) - \frac{1}{5} \ln(x+1)$ b) $F(x) = 2\ln(x+2) + \ln(x-1)$
- c) $F(x) = 2\ln(x+2) - \arctan(x)$ d) $F(x) = \ln(x+3) - \ln(x-1) - \frac{1}{x-1}$
- 4. a) $[(x-3)e^x]_{-1}^0 = 4e^{-1} - 3 \approx -1,53$
- b) $[(x-2)e^{2-x}]_1^2 = e$
- c) $[-e^{-x}(x^2+2x+2)]_0^1 = 2 - 5e^{-1} \approx 0,161$
- d) $[x(\ln(x))^2 - 2x\ln(x) + 2x]_1^e = e - 2 \approx 0,718$
- 5. a) $[(\frac{x^3+1}{3})^3]_0^1 = \frac{7}{3}$
- b) $[\ln|x+1|-x]_{-1}^0$ kann nicht berechnet werden, da $\ln(0)$ nicht ex.
- c) $[\frac{1}{3(x^3+1)}]_0^1 = \frac{1}{6}$
- d) $[\frac{-1}{e^x+1}]_{e^{-1}}^1 = \frac{1}{4}$
- e) $[-\frac{1}{\ln|x|}]_{e^{-2}}^{e^{-1}} = \frac{1}{2}$
- f) $[\ln|x-3| - \ln|x+2|]_1^2 = \ln(3) - 3\ln(2) \approx -0,981$
- g) $[\ln|x^2-x-1|]_{-3}^{-2} = -\ln(\frac{11}{5}) \approx -0,788$
- h) $[-\frac{1}{4} \ln|x+2| + \frac{1}{4} \ln|x| - \frac{1}{2x}]_1^2 = \frac{1}{4} \ln(\frac{3}{2}) + \frac{1}{4} \approx 0,351$
- i) $[-2\arctan(x) + \ln|x-1| + \frac{1}{2}x^2 - 2x]_{-1}^0 = -\ln(2) - \frac{\pi+5}{2} \approx -4,76394$
- j) $[\ln(\ln|x|)]_e^{e^2} = \ln 2 \approx 0,693$
- k) $[\ln|e^x+1|]_0^{\ln 2} = \ln(\frac{3}{2}) \approx 0,405$
- l) $[2\sqrt{x^2+1}]_0^3 = 2\sqrt{10} - 2 \approx 4,325$
- m) $[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}\ln(x^2+1)]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln 2 \approx 0,153$
- n) $[\frac{1}{2}x^2 - \ln|x^2-1|]_2^3 = \ln 3 - 3\ln 2 + \frac{5}{2} \approx 1,52$
- o) $[\frac{1}{3}x^3 - 5\ln|x+5|]_0^1 = 5\ln(\frac{5}{6}) + \frac{1}{3} \approx -0,578$
- p) $[-\frac{1}{2} \arctan(x) + \frac{1}{4} \ln|\frac{x-1}{x+1}| + \frac{1}{2}x^2]_2^3 \approx 2,53$