1. Differenzieren Sie die jeweilige Funktion $z = f(x;\, y)$ mit $x = x(t)$, $y = y(t)$ nach dem Parameter t unter Verwendung der *Kettenregel*:

a) $z = e^{xy}$ mit $x = t^2$, $y = t$

b) $z = x \cdot \ln y$ mit $x = \sin t$, $y = \cos t$

c) $z = x^2 \cdot \sin(2y)$ mit $x = t^2$, $y = t^3$

2. Bestimmen Sie die Ableitung der Funktion $z = \tan(xy)$ längs der Kurve $y = x^3$.

3. Wie lautet die *totale Ableitung* der Funktion $z = \ln(x^4 + y)$ mit $y = x^2$ an der Stelle $x = 1$?

4. Differenzieren Sie die Funktion $z = x^2 y^2 + \sqrt{x}$ mit $x = t^2$, $y = \sqrt{t}$ nach dem Parameter t

a) unter Verwendung der *Kettenregel*,

b) nach Einsetzen der beiden Parametergleichungen in die Funktionsgleichung.

5. Bestimmen Sie die *relativen Extremwerte* der folgenden Funktionen:

a) $z = 3xy^2 + 4x^3 - 3y^2 - 12x^2 + 1$

b) $z = xy - 27\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y}\right)$

Lösungen:

1. a) $\dot{z} = z_x \dot{x} + z_y \dot{y} = y \cdot e^{xy} \cdot 2t + x \cdot e^{xy} \cdot 1 = 3t^2 \cdot e^{t^3}$

b) $\dot{z} = z_x \dot{x} + z_y \dot{y} = (\ln y) \cdot \cos t + \dfrac{x}{y}(-\sin t) = \cos t \cdot \ln(\cos t) - \dfrac{\sin^2 t}{\cos t}$

c) $\dot{z} = z_x \dot{x} + z_y \dot{y} = 2x \cdot \sin(2y) \cdot 2t + 2x^2 \cdot \cos(2y) \cdot 3t^2 =$

$= 4t^3 \cdot \sin(2t^3) + 6t^6 \cdot \cos(2t^3)$

2. Parameter: x; Parametergleichungen: $x = x$, $y = x^3$

$$\dot{z}(x) = z_x \dot{x} + z_y \dot{y} = \frac{y}{\cos^2(xy)} \cdot 1 + \frac{x}{\cos^2(xy)} \cdot 3x^2 = \frac{4x^3}{\cos^2(x^4)}$$

3. Parameter: x; Parametergleichungen: $x = x$, $y = x^2$

$$\dot{z}(x) = z_x \dot{x} + z_y \dot{y} = \frac{4x^3}{x^4 + y} \cdot 1 + \frac{1}{x^4 + y} \cdot 2x = \frac{4x^2 + 2}{x^3 + x}; \quad \dot{z}(x = 1) = 3$$

4. a) $\dot{z} = z_x \dot{x} + z_y \dot{y} = \left(2xy^2 + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right) \cdot 2t + 2x^2 y \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{t}} = 5t^4 + 1$

b) $z = t^4 \cdot t + t = t^5 + t$; $\dot{z} = 5t^4 + 1$

5. a) Die *notwendigen* Bedingungen sind an *vier* Stellen erfüllt:

$(1;\, 2)$: $\Delta = -144 < 0 \Rightarrow$ *Kein* Extremwert

$(1;\, -2)$: $\Delta = -144 < 0 \Rightarrow$ *Kein* Extremwert

$(0;\, 0)$: $\Delta = 144 > 0$ und $z_{xx}(0;\, 0) = -24 < 0 \Rightarrow$ *Maximum*

$(2;\, 0)$: $\Delta = 144 > 0$ und $z_{xx}(2;\, 0) = 24 > 0 \Rightarrow$ *Minimum*

Extremwerte: Maximum $P_1 = (0;\, 0;\, 1)$, Minimum $P_2 = (2;\, 0;\, -15)$

b) Die *notwendigen* Bedingungen führen zu der Stelle $(3;\, -3)$:

$(3;\, -3)$: $\Delta = 3 > 0$ und $z_{xx}(3;\, -3) = -2 < 0 \Rightarrow$ *Maximum*

Extremwert: Maximum $P_1 = (3;\, -3;\, -27)$