**1.** Berechnen Sie die Mehrfachintegrale

a) $$\int_{x=0}^{1} \int_{y=1}^{e} \frac{x^2}{y}\, dy\, dx \qquad = \frac{1}{3}$$

b) $$\int_{x=0}^{3} \int_{y=0}^{1-x} (2xy - x^2 - y^2)\, dy\, dx \qquad = \frac{77}{4}$$

c) $$\int_{x=0}^{1} \int_{y=-1}^{4} \int_{z=0}^{\pi} x^2 y \cdot \cos(yz)\, dz\, dy\, dx \qquad = -\frac{2}{3\pi}$$

d) $$\int_{x=0}^{\pi/2} \int_{y=0}^{1} \int_{z=y}^{y^2} yz \cdot \sin x\, dz\, dy\, dx \qquad = -\frac{1}{24}$$

**2.** Durch Rotation der Kurve $y = \sqrt{x}$ um die $y$-*Achse* entsteht ein *trichterförmiger* Drehkörper. Bestimmen Sie sein Volumen, wenn er in der Höhe $y = 5$ abgeschnitten wird.

$$V_y = \pi \cdot \int_0^5 y^4\, dy = 625\,\pi = 1963{,}5$$

**3.** Berechnen Sie die Mantelfläche, die durch Rotation der Kurve $y = \sqrt{x}$, $0 \leqslant x \leqslant 4$ um die $y$-*Achse* entsteht.

$$M_y = 4\pi \cdot \int_0^2 y^2 \cdot \sqrt{y^2 + 0{,}25}\, dy = 53{,}23$$

**4.** Berechnen Sie den *linearen* und den *quadratischen Mittelwert* der Sinusfunktion im Intervall $0 \leqslant x \leqslant \pi$.

$$\overline{y}_{\text{linear}} = \frac{2}{\pi} = 0{,}637, \quad \overline{y}_{\text{quadratisch}} = \frac{1}{2}\sqrt{2} = 0{,}707$$

**5.** Bestimmen Sie die *relativen Extremwerte* der folgenden Funktionen:

$$z = 2x^3 - 3xy + 3y^3 + 1$$

Die *notwendigen* Bedingungen ergeben zunächst *zwei* Stellen:

$(0; 0)$: $\Delta = -9 < 0 \Rightarrow$ *Kein* Extremwert

$(0{,}44; 0{,}38)$: $\Delta = 27 > 0$ und $z_{xx}(0{,}44; 0{,}38) = 5{,}24 > 0 \Rightarrow$ *Minimum*

*Extremwert*: Minimum $P_1 = (0{,}44; 0{,}38; 0{,}83)$

**6.** Bestimmen Sie die *Extremwerte* der Funktion $z = x + y$ unter der Nebenbedingung $x^2 + y^2 = 1$.

*Hilfsfunktion*: $F(x; y; \lambda) = x + y + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$

$$\left.\begin{array}{l} F_x = 1 + 2\lambda x = 0 \\ F_y = 1 + 2\lambda y = 0 \end{array}\right\} \lambda \text{ eliminieren} \Rightarrow x = y$$

$$F_\lambda = x^2 + y^2 - 1 = 0$$

*Maximum*: $x = y = \frac{1}{2}\sqrt{2}$; $\quad z_{\max} = \sqrt{2}$

*Minimum*: $x = y = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$; $\quad z_{\min} = -\sqrt{2}$

**7.** Welchen *Anstieg* besitzt die Bildfläche von $z = 3x \cdot \ln\sqrt{x^2 + y^2} - \cos(xy^2 - \pi x)$ an der Stelle $x = 1$, $y = 0$?

$$z_x(1; 0) = 3; \quad z_y(1; 0) = 0$$