1. Berechne das folgende Integral mit Hilfe der angegebenen Substitution.

a) $\int_0^1 e^x \sqrt{e^x+1}\,dx;\ x(t)=\ln t$ b) $\int_1^2 \sqrt{e^{3x}+e^{2x}}\,dx;\ x(t)=\ln t$ c) $\int_1^3 \frac{1}{x}\ln x^2\,dx;\ x(t)=e^t$

d) $\int_1^2 \frac{1+\ln x}{x(1-\ln x)}\,dx;\ x(t)=e^t$ e) $\int_0^1 \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,dx;\ x(t)=t^2$ f) $\int_1^3 \frac{1}{x+\sqrt{x}}\,dx;\ x(t)=t^2$

g) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx;\ x(t)=2\sin t$ h) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-2x^2}}\,dx;\ x(t)=\frac{1}{\sqrt{2}}\cos t$

2. Berechne das folgende Integral mittels einer geeigneten Substitution der Integrationsvariablen

a) $\int_1^e \frac{(\ln x)^2}{x}\,dx$ b) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2-x^2}}\,dx$ c) $\int_0^{0,5} \frac{1}{\sqrt{4-4x^2}}\,dx$

d) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4-2x^2}}\,dx$ e) $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\,dx$ f) $\int_1^4 \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\,dx$

3. Berechne die folgenden uneigentlichen Integrale.

a) $\int_1^{+\infty} \frac{3}{x^4}\,dx$ b) $\int_{-1}^{-\infty} 4x^{-5}\,dx$ c) $\int_{-2}^{-\infty} \frac{1}{2}t^{-5}\,dt$ d) $\int_2^{+\infty} \frac{3}{t^2}\,dt$

4. Für welchen Wert von t mit $t>1$ wird der Inhalt der Fläche, die das Schaubild der Funktion f_t mit $f_t(x)=(1-t)x^2-tx$ und die x-Achse einschließen, minimal? Gib den minimalen Inhalt an.

5. Das Schaubild der Funktion f mit $f(x)=36x-x^3$ schließt mit der x-Achse im 1. Feld eine Fläche ein. Aus dieser Fläche soll parallel zur y-Achse ein Streifen der Breite 3 so ausgeschnitten werden, daß dessen Fläche möglichst groß ist. Ermittle die Gleichungen der beiden Randgeraden des Streifens.

Lösungen:

1.

a) $x(t)=\ln t$ gibt $\int_{t=1}^{e} \sqrt{t+1}\,dt = \left[\frac{2}{3}(t+1)^{\frac{3}{2}}\right]_1^e = \frac{2}{3}(e+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{3}\sqrt{2} \approx 2,8943$

b) $J_1(2) = \frac{2}{3}\left((1+e^2)^{\frac{3}{2}} - (1+e)^{\frac{3}{2}}\right) \approx 11,4187$

c) $J_1(3) = (\ln 3)^2 \approx 1,2069$

d) $J_1(2) = [1-\ln x - 2\ln(1-\ln x)]_1^2 = (1-\ln 2) - 2\ln(1-\ln 2) - 1$
$= -\ln 2 - 2\ln(1-\ln 2) \approx 1,6696$

e) $J_0(1) = [2(1+\sqrt{x} - \ln(1+\sqrt{x}))]_0^1 = 2(1-\ln 2) = 2\ln\frac{e}{2} \approx 0,6137$

f) $J_1(3) = [2\ln(1+\sqrt{x})]_1^3 = 2\ln(1+\sqrt{3}) - 2\ln 2 = \ln\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)^2 \approx 0,6238$

g) $J_0(1) = \int_{t=0}^{\frac{\pi}{6}} dt = \frac{\pi}{6} = 0,5236$ oder unmittelbar $J_0(1) = \left[\arcsin\frac{x}{2}\right]_0^1 = \frac{\pi}{6}$

h) $J_0\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{-1}{\sqrt{2}}\int_{t=\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} dt = \frac{-1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{8}\pi$ oder unmittelbar

$\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{8}\pi$

2.

a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{\pi}{4}$ c) $\frac{\pi}{12}$ d) $\frac{\sqrt{2}}{8}\pi$ e) $2\ln 2 - 1 \approx 0,3863$

f) $1+\sqrt{x} = v$; $dx = 2(v-1)dv$;

3.

a) 1 b) 1 c) $\frac{1}{128}$ d) 1,5 e) 1 f) $\frac{-1}{8}$

4.

Nullstellen sind $x_1 = 0$; $x_2 = \frac{t}{1-t}$. Für $t>1$ ist $x_2 < x_1$, also

$A = \int_{\frac{t}{1-t}}^{0} ((1-t)x^2 - tx)dx = \left[\frac{1}{3}(1-t)x^3 - \frac{1}{2}tx^2\right]_{\frac{t}{1-t}}^{0} = \frac{1}{6}\cdot\frac{t^3}{(1-t)^2}$

$A'(t) = \frac{1}{6}\frac{t^2(3-t)}{(1-t)^3}$; $A'(t)=0$ gibt $t=3$; $A_{min}(3) = \frac{9}{8}$ ist Min. Das Vorzeichenwechselkriterium ergibt einen Wechsel von Minus nach Plus, also ist $A(3)$ minimal.

5.

Wegen: $A(z) = \int_z^{z+h} f(x)\,dx = F(z+h) - F(z)$ mit

$A'(z) = F'(z+h) - F'(z) = f(z+h) - f(z)$ erhält man für extremales z die Bedingung $36(z+3) - (z+3)^3 - 36z + z^3 = 0$ bzw. $-9z^2 - 27z + 81 = 0$; $z^2 + 3z - 9 = 0$ und daraus $z = \frac{1}{2}(-3+3\sqrt{5})$, weil $A''\left(\frac{1}{2}(-3+3\sqrt{5})\right) < 0$ ist.

$z = \frac{3}{2}(\sqrt{5}-1) \approx 1,854$ und $z+3 = \frac{3}{2}(\sqrt{5}+1) \approx 4,854$. Die Randgeraden sind $x = \frac{3}{2}(\sqrt{5}-1)$ und $x = \frac{3}{2}(\sqrt{5}+1)$. Als maximaler Flächeninhalt ergibt sich $A_{max} = \frac{405}{4}\sqrt{5} \approx 226,402$.