1. Berechne die Länge des Graphen der Funktion f über ein Intervall [a; b].

a) $f(x)=\frac{1}{4}x^2-\ln\sqrt{x}$; $[4;9]$

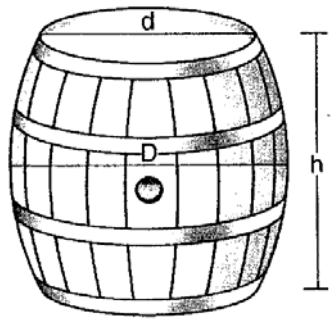
b) $f(x)=\frac{x^4+3}{6x}$; $[1;2]$

c) $f(x)=\frac{1}{3}(x-3)\cdot\sqrt{x}$; $[4;9]$

d) $f(x)=\ln\sqrt{\sin x\cdot\cos x}$; $\left[\frac{\pi}{6};\ \frac{\pi}{3}\right]$

2. Die Kettenlinie mit der Gleichung $y=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$ erzeugt bei Rotation um die erste Achse einen Körper, der *Katenoid* heißt. Wie groß ist dessen Mantel über dem Intervall $[-1;1]$.

3. a) Ein Faß (Fig. 242.3) hat den kleinen Durchmesser $d=1{,}20$ m, den großen Durchmesser $D=1{,}60$ m und die Höhe $h=2$ m. Berechne den Rauminhalt des Fasses.
(Anleitung: Führe wie in Fig. 242.2 ein Koordinatensystem ein; verwende eine Parabel 2. Ordnung.)
b) Wie groß ist der prozentuale Fehler, wenn man für die Inhaltsberechnung das Faß durch einen Zylinder ersetzt mit dem Durchmesser $\frac{1}{2}(d+D)$?



242.3

Lösungen:

1.

a) $l=\int_4^9\sqrt{1+(\frac{x^2-1}{2x})^2}\,dx=\int_4^9\frac{x^2+1}{2x}\,dx=\frac{1}{2}\int_4^9(x+\frac{1}{x})\,dx=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}x^2+\ln x\right]_4^9$

$=\frac{1}{2}(\frac{81}{2}+\ln 9-\frac{16}{2}-\ln 4)=\frac{1}{2}(\frac{65}{2}+\ln\frac{9}{4})$

b) $l=\int_1^2\sqrt{1+(\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2x^2})^2}\,dx=\int_1^2\sqrt{(\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2x^2})^2}\,dx=\frac{1}{2}\int_1^2(x^2+\frac{1}{x^2})\,dx$

$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{x}\right]_1^2=\frac{1}{2}(\frac{8}{3}-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+1)=\frac{17}{12}$

c) $l=\int_4^9\sqrt{1+(\frac{x^{\frac{1}{2}}}{2}-\frac{3}{2}x^{-\frac{1}{2}}}\,dx=\int_4^9(\frac{x^{\frac{1}{2}}}{2}+\frac{3}{2}x^{-\frac{1}{2}})\,dx=\frac{1}{2}\left[\frac{2}{2}x^{\frac{3}{2}}+6x^{\frac{1}{2}}\right]_4^9=7\frac{1}{3}$

d) $l=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\sqrt{1+(\frac{\cos^2x-\sin^2x}{2\cdot\sin x\cdot\cos x})^2}\,dx=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos^2x+\sin^2x}{2\cdot\sin x\cdot\cos x}\,dx=\frac{1}{2}\left[\ln(\tan x)\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}$

$=\frac{1}{2}(\ln(\tan\frac{\pi}{3})-\ln(\tan\frac{\pi}{6}))=\frac{1}{2}(\ln\sqrt{3}-\ln\frac{1}{3}\sqrt{3})=\frac{1}{2}\ln 3$

2.

$f(x)=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$; $f'(x)=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})$

$1+(f'(x))^2=\frac{1}{4}e^{2x}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}e^{-2x}=(\frac{1}{2}e^x+\frac{1}{2}e^{-2})^2$

$M=2\pi\int_{-1}^{1}\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})\cdot\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})\,dx=\frac{1}{2}\pi\int_{-1}^{1}e^{2x}\,dx+\frac{1}{2}\pi\int_{-1}^{1}2\,dx+\frac{1}{2}\pi\int e^{-x}\,dx$

$=-\pi\left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_{-1}^{1}+\left[\frac{1}{2}\pi\cdot 4-\frac{1}{2}\pi\cdot\frac{1}{2}e^{-2x}\right]_{-1}^{1}=\frac{1}{2}\pi(e^2-e^{-2})+2\pi\approx 17{,}7$

3.

a) Parabel 2. Ordnung durch $A(-1|0{,}6)$; $B(0|0{,}8)$; $C(1|0{,}6)$ hat die Gleichung

$y=-0{,}2x^2+0{,}8$; $V=2\pi\int_0^1(-0{,}2x^2+0{,}8)^2\,dx=\frac{406}{375}\pi$;

$V\approx 1{,}083\pi\approx 3{,}401\ (m^3)$.

b) Zylinder mit $h=2$; $r=0{,}7$ gibt $\bar{V}=\pi r^2\cdot h=0{,}49\cdot 2\pi=0{,}98\pi$.

Relativer Fehler: $\frac{V-\bar{V}}{V}\approx 0{,}095=9{,}5$ % ist der Zylinder zu klein.