1. Berechnen Sie die Lage des Schwerpunktes der Fläche, die von den beiden Parabeln mit den Funktionsgleichungen $y = -x^2$ und $y = x^2 - 4$ eingeschlossen wird.

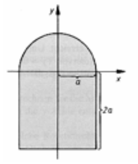


Bild V-94

2. Bestimmen Sie den Flächenschwerpunkt der in Bild V-94 skizzierten Figur (Quadrat mit aufgesetztem Halbkreis).

3. Wo liegt der Schwerpunkt eines Viertelkreises (Radius R)?

4. Bestimmen Sie den Schwerpunkt der Fläche, die von der Geraden $y = x + 2$ und der Parabel $y = x^2 - 4$ berandet wird.

5. Durch Rotation der im 1. Quadrant gelegenen Kurve $y = \sqrt{\cos x}$ um die *x-Achse* entsteht ein Drehkörper. Wo befindet sich der Schwerpunkt?

6. Für den durch Drehung des im 1. Quadranten gelegenen Teils der Ellipse mit der Gleichung $b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2$ um die *y-Achse* entstandenen Rotationskörper ist der Schwerpunkt zu bestimmen.

7. Wo liegt der Schwerpunkt des Rotationskörpers, der durch Drehung der Kurve $y = \ln x,\ 1 \leqslant x \leqslant e$ um die *x-Achse* entsteht?

8. Berechnen Sie das Massenträgheitsmoment eines *Rotationsellipsoids*, das durch Drehung der Ellipse $b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2$ um die *y-Achse* entsteht (Dichte ρ).

9. Für einen homogenen geraden *Kreiskegel* (Radius R, Höhe H, Dichte ρ) ist das auf die Symmetrieachse bezogene Massenträgheitsmoment zu berechnen.

10. Berechnen Sie unter Verwendung des *Satzes von Steiner* das Massenträgheitsmoment eines homogenen *Vollzylinders* bezüglich einer *Mantellinie* (Zylinderhöhe H, Grundkreisradius R, Dichte ρ).

Lösungen:

1. $x_s = 0, \quad y_s = -2$ (aus Symmetriegründen)

2. $x_s = 0$ (aus Symmetriegründen)

$$y_s = \frac{1}{2A} \cdot \int_{-a}^{a} [a^2 - x^2 - 4a^2]\,dx = -0{,}598\,a \quad \left(\text{mit } A = 4a^2 + \frac{1}{2}\pi a^2\right)$$

3. Aus Symmetriegründen ist $x_s = y_s$:

$$x_s = y_s = \frac{1}{2A} \cdot \int_0^R (R^2 - x^2)\,dx = \frac{4}{3\pi} R = 0{,}424\,R \quad \left(\text{mit } A = \frac{1}{4}\pi R^2\right)$$

4. $A = \int_{-2}^{3} [(x+2) - (x^2 - 4)]\,dx = 125/6; \quad x_s = \frac{1}{A} \cdot \int_{-2}^{3} x\,[(x+2) - (x^2 - 4)]\,dx = 0{,}5;$

$$y_s = \frac{1}{2A} \cdot \int_{-2}^{3} [(x+2)^2 - (x^2 - 4)^2]\,dx = 0$$

5. $V_x = \pi, \quad x_s = \frac{\pi}{2} - 1 = 0{,}571, \quad y_s = z_s = 0$

6. $V_y = \frac{2}{3}\pi a^2 b, \quad y_s = \frac{3}{8} b, \quad x_s = z_s = 0$

7. $V_x = \pi \cdot \int_1^e (\ln x)^2\,dx = \pi(e - 2) = 2{,}257, \quad x_s = 2{,}224, \quad y_s = z_s = 0$

8. $$J_y = \pi\rho \cdot \int_0^b \frac{a^4}{b^4}(b^2 - y^2)^2\,dy = \frac{8}{15}\pi\rho a^4 b = \frac{2}{5} m a^2$$

$\left(m\text{: Masse des Rotationsellipsoids; } m = \rho V = \frac{4}{3}\pi\rho a^2 b\right)$

9. Nach Bild A-64 ist:

$$J_x = \frac{1}{2}\pi\rho \cdot \int_0^H \left(\frac{R}{H}x\right)^4 dx = \frac{1}{10}\pi\rho R^4 H = \frac{3}{10} m R^2$$

$\left(m\text{: Masse des Kegels; } m = \rho V = \frac{1}{3}\pi\rho R^2 H\right)$

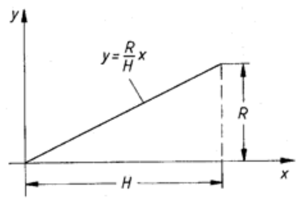
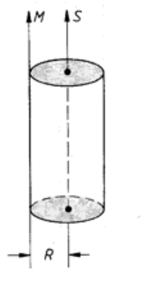


Bild A-64

10. Nach Beispiel 1 aus Abschnitt 10.9.1 ist $J_S = \frac{1}{2} m R^2$.

Aus dem *Steinerschen Satz* folgt dann (vgl. Bild A-65):

$$J_M = J_S + m R^2 = \frac{1}{2} m R^2 + m R^2 = \frac{3}{2} m R^2$$



M: Mantellinie

S: Schwerpunktsachse (Symmetrieachse)

R: Radius

Bild A-65