1) Berechnen Sie den *Summenwert* der folgenden geometrischen Reihen:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{8}\right)^{n-1}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} 0{,}3^{n-1}$ c) $\sum_{n=1}^{\infty} 4\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

2) Welchem allgemeinem *Bildungsgesetz* unterliegen die folgenden Reihen? Untersuchen Sie diese Reihen mit Hilfe *des Quotientenkriteriums* auf *Konvergenz* bzw. *Divergenz*:

a) $1 + \frac{10}{1!} + \frac{100}{2!} + \frac{1000}{3!} + \ldots$ b) $\frac{1}{1 \cdot 2^1} + \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \frac{1}{5 \cdot 2^5} + \frac{1}{7 \cdot 2^7} + \ldots$

c) $\frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \frac{7}{2^4} + \ldots$ d) $\frac{\ln 2}{1!} + \frac{(\ln 2)^2}{2!} + \frac{(\ln 2)^3}{3!} + \ldots$

3) Untersuchen Sie mit Hilfe des *Quotientenkriteriums*, ob die folgenden Reihen *konvergieren* oder *divergieren*:

a) $\frac{1}{11} + \frac{1}{101} + \frac{1}{1001} + \frac{1}{10001} + \ldots$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{5^n}$

c) $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^6} + \ldots$ d) $\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

e) $\frac{2^1}{1} - \frac{2^2}{2} + \frac{2^3}{3} - \frac{2^4}{4} + - \ldots$ f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{2n}}{(2n)!}$

4) Welche der folgenden *alternierenden* Reihen *konvergieren*, welche *divergieren*? Verwenden Sie bei der Untersuchung das Konvergenzkriterium von *Leibniz*.

a) $1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + - \ldots$ b) $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + - \ldots$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n^2}$ d) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n \cdot 5^{2n-1}}$

Lösungen:

1) a) $q = \frac{1}{8}, \quad s = \frac{8}{9}$ b) $q = 0{,}3, \quad s = \frac{10}{7}$ c) $q = -\frac{2}{3}, \quad s = 4 \cdot \frac{3}{5} = 2{,}4$

2) a) Die Reihe *konvergiert*: $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{10}{n+1} = 0 < 1$

b) Die Reihe *konvergiert*: $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{4(2n+3)} = \frac{1}{4} < 1$

c) Die Reihe *konvergiert*: $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{2(2n-1)} = \frac{1}{2} < 1$

d) Die Reihe *konvergiert*: $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln 2}{n+1} = 0 < 1$

3) a) Die Reihe *konvergiert*: $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{10^n+1}{10^{n+1}+1} =$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{1+10^{-n}}{10+10^{-n}} = \frac{1}{10} < 1$

b) Die Reihe *konvergiert*: $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)\cdot 5^n}{5^{n+1}\cdot n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{5n} = \frac{1}{5} < 1$

c) Die Reihe *konvergiert*: $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{2n}}{2^{2n+2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{4} = \frac{1}{4} < 1$

d) Die Reihe *konvergiert*: $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^n}{n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}} =$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2} < 1$

e) Die Reihe *divergiert*: $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}\cdot n}{(n+1)\cdot 2^n} =$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{n+1} = 2 > 1$

f) Die Reihe *konvergiert*: $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{3^{2n+2}\cdot(2n)!}{(2n+2)!\,3^{2n}} =$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{9}{(2n+1)(2n+2)} = 0 < 1$

4) a) $\frac{1}{1!} > \frac{1}{2!} > \frac{1}{3!} > \ldots$ und $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n!} = 0$: $\Rightarrow$ Reihe *konvergiert*

b) $1 > \frac{1}{3} > \frac{1}{5} > \ldots$ und $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n-1} = 0$: $\Rightarrow$ Reihe *konvergiert*

c) $\frac{1}{1} > \frac{1}{4} > \frac{1}{9} > \ldots$ und $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$: $\Rightarrow$ Reihe *konvergiert*

d) $\frac{1}{5} > \frac{1}{2\cdot 5^3} > \frac{1}{3\cdot 5^5} \ldots$ und $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n\cdot 5^{2n-1}} = 0$: $\Rightarrow$ Reihe *konvergiert*