Übungsaufgaben Mathematik II (Taylorreihe)
Fachhochschule Frankfurt
Fachbereich MND
Prof. Dr. H. Becker

1. Berechnen Sie die Taylorreihe der folgenden Funktionen mit dem angegebenen Entwicklungspunkt x_o

   $f(x) = \ln(x) \qquad x_o = 1$

   $g(x) = \sin(x) \qquad x_o = \pi / 6$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}(x-1)^n$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{1!}\frac{1}{2}\sqrt{3}\left(x-\frac{\pi}{6}\right) - \frac{1}{2!}\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)^2 - \frac{1}{3!}\frac{1}{2}\sqrt{3}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)^3 + \frac{1}{4!}\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)^4 + \frac{1}{5!}\frac{1}{2}\sqrt{3}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)^5 \pm \cdots$$

2. Bis zu welchem Grad muß man die Taylorreihe von sin bzw. cos mit dem Entwicklungspunkt $x_o = 0$ berechnen, um die Werte sin(1) bzw. cos(1) jeweils mit einer Abweichung von höchstens 10^{-5} zu erhalten? (Winkel im Bogenmaß)
   (*9 bzw. 8)*
3. Entwickeln Sie die Funktion tan(x) in eine Taylorreihe um den Punkt $x_o = 0$. Berechnen Sie die ersten drei nicht verschwindenden Glieder.
   $(x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5)$
4. Lösen Sie die Gleichung
   $$\cos(x) = \frac{25}{24} - \frac{x^2}{2}$$
   näherungsweise, indem Sie cos x durch sein Taylorpolynom vierten Grades mit dem Entwicklungspunkt $x_o = 0$ ersetzen und die entstehende neue Gleichung lösen. Testen Sie mit dem Taschenrechner die Qualität der Lösung.
   $x_1 = 1$ $\qquad x_2 = -1$
5. Entwickeln Sie die berühmte Beziehung $E = m \cdot c^2$ mit
   $m = \frac{m_o}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$ indem Sie den Ausdruck für die Masse in eine Taylorreihe entwickeln.
   Interpretieren Sie die ersten beiden Terme der Entwicklung.
   $(E = m_0 c^2 + \frac{1}{2}m_0 v^2 + \frac{3}{8}m_0\frac{v^4}{c^2}\ldots)$
6. Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:
   $$\lim_{x\to 3}\frac{x^3-27}{x-3} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x^2} \qquad \lim_{x\to -2}\frac{x^2+5x+6}{x^2+x-2}$$
   27; 1/2 -1/3
7. Berechnen Sie den Grenzwert $\lim_{x\to 0}(x^x)$

   Berechnen Sie zuvor $\lim_{x\to 0}(x \cdot \ln(x))$ und verwenden Sie die Beziehung $\ln(x^x) = x \cdot \ln(x)$

   =1