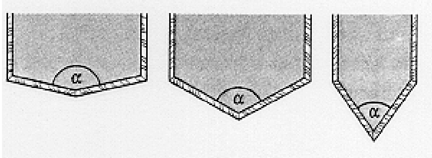
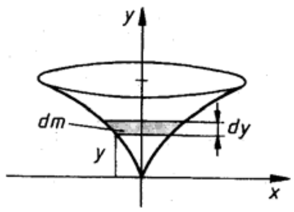
1. Aus vier gleich breiten Brettern soll eine oben offene symmetrische Rinne (Fig. 199.1) hergestellt werden, so daß zwei ihrer Wände parallel sind. Wie ist der Winkel α der beiden anderen Wände zu wählen, damit das Fassungsvermögen der Rinne möglichst groß wird?



199.1

2. Durch Rotation der Kurve $y = \sqrt{1\ \mathrm{m} \cdot x}$ um die *y-Achse* entsteht ein trichterförmiger Behälter (vgl. hierzu auch Aufgabe 12). Er soll von einem Wasserreservoir aus bis zu einer Höhe von 5 m gefüllt werden. Berechnen Sie die erforderliche *Mindestarbeit* (Dichte des Wassers: $\rho = 1\ \mathrm{g/cm^3} = 1000\ \mathrm{kg/m^3}$).

Anleitung: Der Wasserpegel im Trichter habe die Höhe y erreicht. Um den Pegel um dy zu erhöhen, muß die Wassermenge dm aus dem Reservoir ($y = 0$) in diese Höhe gebracht werden. Die dabei verrichtete Hubarbeit beträgt $dW = (dm)\,g\,y$ (vgl. hierzu Bild V-92).



3. Bestimmen Sie die *Mac Laurinsche Reihe* der Funktion $f(x) = \cosh x$

a) auf *direktem* Wege nach Formel (VI-38),

b) aus den *Potenzreihenentwicklungen* von e^x und e^{-x} unter Berücksichtigung der Definitionsformel $\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$.

4. Entwickeln Sie die Wurzelfunktion $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^3}}$ unter Verwendung der Binomischen Reihe in ein *Mac Laurinsches Polynom* (Abbruch nach dem 3. Glied). Berechnen Sie anschließend mit dieser Näherungsfunktion den Funktionswert an der Stelle $x = 0{,}2$ und schätzen Sie den Fehler ab.

Lösungen:

1. Variable α, Brettbreite a. Flächeninhalt $A(\alpha) = 2a^2 \cdot \sin\frac{\alpha}{2} + a^2 \cdot \sin\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\alpha}{2}$.

$A'(\alpha) = a^2\left(\cos^2\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2}\right)$; $A'(\alpha) = 0$ gibt $\cos\frac{\alpha_m}{2} = \frac{-1+\sqrt{3}}{2}$; $\frac{\alpha_m}{2} = 68{,}53°$;

$\alpha_m = 137{,}06°$; $A''(\alpha) = -a^2 \cdot \sin\frac{\alpha}{2}\left(2\cos\frac{\alpha}{2} + 1\right)$; $A''(\alpha_m) < 0$; also Maximum.

2.
$$W = \pi\rho g \cdot \int_{0\,\mathrm{m}}^{5\,\mathrm{m}} y^5\,dy \quad\Rightarrow\quad W = 8{,}026 \cdot 10^7\ \mathrm{Nm}$$

3. a) $\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$; *Konvergenzbereich*: $|x| < \infty$

b)
$$\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) =$$
$$= \frac{1}{2}\left[\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots\right) + \left(1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - + \ldots\right)\right] =$$
$$= \frac{1}{2}\left(2 + 2\cdot\frac{x^2}{2!} + 2\cdot\frac{x^4}{4!} + \ldots\right) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots$$

4.
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^3}} = (1-x^3)^{-1/2} = \underbrace{1 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{8}x^6}_{\text{Näherungsfunktion}} + \underbrace{\frac{5}{16}x^9}_{\text{Fehler}} + \ldots$$

$$f(0{,}2) \approx 1 + \frac{1}{2}(0{,}2)^3 + \frac{3}{8}(0{,}2)^6 = 1{,}004\,024 \quad \text{(auf 6 Dezimalstellen genau)}$$

$$\textit{Fehler}: \approx \frac{5}{16}(0{,}2)^9 = 0{,}16 \cdot 10^{-6}$$