1. Die in Bild II-12 skizzierte periodische Funktion besteht aus *Parabelbögen.* Ihre Funktionsgleichung lautet im Periodenintervall $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$:

$$f(x) = x(2\pi - x)$$

Bestimmen Sie die Fourier-Reihe dieser Funktion.

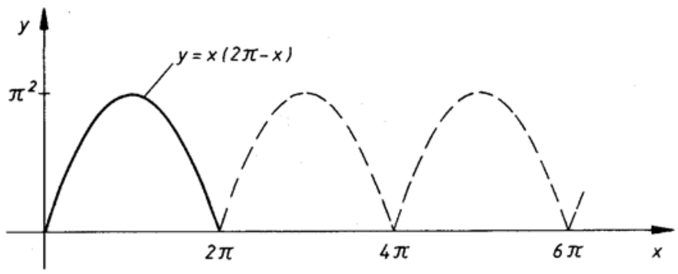

Bild II-12 Parabelförmiger Impuls

2. Die folgenden bestimmten Integrale sind elementar, d.h. in geschlossener Form *nicht* lösbar. Sie lassen sich jedoch durch *Potenzreihenentwicklung* des Integranden und anschließender *gliedweiser Integration* berechnen. Bestimmen Sie den Wert dieser Integrale auf *vier* Dezimalstellen nach dem Komma genau.

a) $\displaystyle\int_0^{0,5} \cos(\sqrt{x})\,dx$ b) $\displaystyle\int_0^{0,2} \frac{e^x}{x+1}\,dx$ c) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\sin x}{x}\,dx$

Lösungen:

1.

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\cdot\int_0^{2\pi}(2\pi x - x^2)\,dx = \frac{4}{3}\pi^2$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\cdot\int_0^{2\pi}(2\pi x - x^2)\cdot\cos(nx)\,dx = -\frac{4}{n^2} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

$$b_n = 0 \quad \text{(gerade Funktion)} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

$$f(x) = \frac{2}{3}\pi^2 - 4\left(\frac{1}{1^2}\cdot\cos x + \frac{1}{2^2}\cdot\cos(2x) + \frac{1}{3^2}\cdot\cos(3x) + \ldots\right)$$

2.

a) In der Mac Laurinschen Reihe von $\cos z$ wird $z = \sqrt{x}$ gesetzt und anschließend *gliedweise* integriert:

$$\int_0^{0,5}\cos(\sqrt{x})\,dx = \int_0^{0,5}\left(1 - \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{4!} - \frac{x^3}{6!} + - \ldots\right)dx =$$

$$= 0,5 - \frac{0,5^2}{2\cdot 2!} + \frac{0,5^3}{3\cdot 4!} - \frac{0,5^4}{4\cdot 6!} + - \ldots =$$

$$= 0,5 - 0,0625 + 0,001\,736 - \underbrace{0,000\,021}_{< 0,5\cdot 10^{-4}} + - \ldots$$

Durch Abbruch der Reihe nach dem *3. Glied* folgt:

$$\int_0^{0,5}\cos(\sqrt{x})\,dx = 0,4392 \quad \text{(auf 4 Dezimalstellen genau)}$$

b) Die Mac Laurinschen Reihen von e^x und $\frac{1}{x+1} = (x+1)^{-1}$ werden *gliedweise* ausmultipliziert, anschließend wird integriert:

$$\int_0^{0,2}\frac{e^x}{x+1}\,dx = \int_0^{0,2} e^x\cdot(1+x)^{-1}\,dx = \int_0^{0,2}\left(1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{9}{24}x^4 + \ldots\right)dx =$$

$$= 0,2 + \frac{1}{6}(0,2)^3 - \frac{1}{12}(0,2)^4 + \frac{9}{120}(0,2)^5 + \ldots =$$

$$= 0,2 + 0,001\,333 - 0,000\,133 + \underbrace{0,000\,024}_{< 0,5\cdot 10^{-4}} + \ldots$$

Durch Abbruch nach dem *3. Glied* folgt:

$$\int_0^{0,2}\frac{e^x}{x+1}\,dx = 0,2012 \quad \text{(auf 4 Dezimalstellen genau)}$$

c) Die Mac Laurinsche Reihe von $\sin x$ wird zunächst *gliedweise* durch x dividiert und anschließend integriert.

$$\int_0^1\frac{\sin x}{x}\,dx = \int_0^1\left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + - \ldots\right)dx = 1 - \frac{1}{3\cdot 3!} + \frac{1}{5\cdot 5!} - \frac{1}{7\cdot 7!} + - \ldots =$$

$$= 1 - 0,055\,555 + 0,001\,666 - \underbrace{0,000\,028}_{< 0,5\cdot 10^{-4}} + - \ldots$$

Durch Abbruch der Reihe nach dem *3. Glied* folgt:

$$\int_0^1\frac{\sin x}{x}\,dx = 0,9461 \quad \text{(auf 4 Dezimalstellen genau)}$$