1. Bestimmen Sie die *partiellen Ableitungen 1. und 2. Ordnung* der folgenden Funktionen:

a) $z(x;\,y) = (3x - 5y)^4$ b) $w(u;\,v) = 2 \cdot \cos(3uv)$

c) $z(x;\,y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x + y}$ d) $z(r;\,\varphi) = 3r \cdot e^{r\varphi}$

2. Zeigen Sie: Die Funktion $z = a \cdot e^{x/y}$ erfüllt die Gleichung $xz_x + yz_y = 0$ (a: Konstante).

3. Bestimmen Sie die Gleichung der *Tangentialebene* in P:

a) $z = (x^2 + y^2) \cdot e^{-x}$, $P = (0;\,1;\,1)$

b) $z = 3 \cdot \sqrt{\dfrac{x^2}{y}} + 2 \cdot \cos(\pi(x + 2y))$, $P = (2;\,1;\,?)$

4. Man bestimme das *totale* oder *vollständige Differential* der folgenden Funktionen:

a) $z(x;\,y) = 4x^3y - 3x \cdot e^y$ b) $z(x;\,t) = \dfrac{t^2 + x}{2t - 4x}$

c) $z(x;\,y) = \dfrac{x^2 + y^2}{x - y}$ d) $u(x;\,y;\,z) = \ln\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

5. Berechnen Sie unter Verwendung des *totalen Differentials* die Oberflächenänderung $\Delta O \approx dO$ eines Zylinders mit Boden und Deckel, dessen Radius $r = 10$ cm um 5% *vergrößert* und dessen Höhe $h = 25$ cm gleichzeitig um 2% *verkleinert* wurde und vergleichen Sie diesen Näherungswert mit dem exakten Wert ΔO_{exakt}.

Lösungen:

1. a) $z_x = 12(3x - 5y)^3$; $z_y = -20(3x - 5y)^3$; $z_{xx} = 108(3x - 5y)^2$;
$z_{xy} = z_{yx} = -180(3x - 5y)^2$; $z_{yy} = 300(3x - 5y)^2$

b) $w_u = -6v \cdot \sin(3uv)$; $w_v = -6u \cdot \sin(3uv)$; $w_{uu} = -18v^2 \cdot \cos(3uv)$;
$w_{uv} = w_{vu} = -6 \cdot \sin(3uv) - 18uv \cdot \cos(3uv)$; $w_{vv} = -18u^2 \cdot \cos(3uv)$

c) $z = \dfrac{x^2 - y^2}{x + y} = \dfrac{(x + y)(x - y)}{x + y} = x - y$

$z_x = 1$; $z_y = -1$; $z_{xx} = 0$; $z_{xy} = z_{yx} = 0$; $z_{yy} = 0$

d) $z_r = 3(1 + r\varphi) \cdot e^{r\varphi}$; $z_\varphi = 3r^2 \cdot e^{r\varphi}$; $z_{rr} = 3\varphi(2 + r\varphi) \cdot e^{r\varphi}$;
$z_{r\varphi} = z_{\varphi r} = 3r(2 + r\varphi) \cdot e^{r\varphi}$; $z_{\varphi\varphi} = 3r^3 \cdot e^{r\varphi}$

2. $xz_x + yz_y = x\dfrac{a}{y} \cdot e^{x/y} + y\left(-\dfrac{ax}{y^2} \cdot e^{x/y}\right) = 0$

3. a) $z = -x + 2y - 1$ b) $P = (2;\,1;\,8)$, $z = 3x - 3y + 5$

4. a) $dz = (12x^2y - 3 \cdot e^y)\,dx + (4x^3 - 3x \cdot e^y)\,dy$

b) $dz = \dfrac{4t^2 + 2t}{(2t - 4x)^2}\,dx + \dfrac{2t^2 - 8tx - 2x}{(2t - 4x)^2}\,dt$

c) $dz = \dfrac{x^2 - 2xy - y^2}{(x - y)^2}\,dx + \dfrac{x^2 + 2xy - y^2}{(x - y)^2}\,dy$

d) $du = \dfrac{x}{x^2 + y^2 + z^2}\,dx + \dfrac{y}{x^2 + y^2 + z^2}\,dy + \dfrac{z}{x^2 + y^2 + z^2}\,dz$

5. $O(r;\,h) = 2\pi rh + 2\pi r^2$; $dr = \Delta r = 0{,}5$ cm; $dh = \Delta h = -0{,}5$ cm

$dO = \dfrac{\partial O}{\partial r}\,dr + \dfrac{\partial O}{\partial h}\,dh = (2\pi h + 4\pi r)\,dr + 2\pi r\,dh$

$\Delta O \approx dO = 109{,}96\ \text{cm}^2$; $\Delta O_{\text{exakt}} = 109{,}96\ \text{cm}^2$