Klausur **Numerische Mathematik** **SS 2008** **Dr. T. Wenisch** 100% = 40 Punkte

Name: ______________________________ **Punkte:** **Note:**

Vorname: ______________________________

Matr. Nr.: ______________________________

1. Gegeben ist die Funktion $f_{(x)} = x^3 - 6{,}5x^2 + 11x - 4$

   a) Schreiben Sie das Nullstellenproblem als Fixpunktgleichung. (Hinweis: lösen Sie die Gleichung nach dem linearen Term auf) (2)

   b) Führen Sie mit Ihrem Ergebnis aus a) eine Fixpunktiteration durch. (3)
   Starten Sie mit $x_0=0$ und rechnen Sie bis x_3.

   c) Neben a) gibt es noch weitere mögliche Fixpunktgleichungen zu f(x). (3)
   Geben Sie zwei dieser Möglichkeiten an.

   d) $f_{(x)}$ hat die Nullstellen $x_{01}=0{,}5$, $x_{02}=2$ und $x_{03}=4$ (2)
   Prüfen Sie, ob es sich bezüglich Ihrer Gleichung unter a) um anziehende oder abstoßende Fixpunkte handelt.

2. Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 \\ -6 & 8 & -15 \\ 16 & -20 & 41 \end{pmatrix}$$

   a) Führen Sie eine LR-Zerlegung der Matrix A durch (3)

   b) Überprüfen Sie Ihr Ergebnis aus a) durch Multiplikation L·R (1)

   c) Gegeben ist der Vektor $b = \begin{pmatrix} 10 \\ -19 \\ 67 \end{pmatrix}$. Lösen Sie das lineare Gleichungssystem (4)

   $A \cdot x = b$ mittels der LR-Zerlegung aus a).

   d) gegeben sei nun die Matrix $C = \begin{pmatrix} a & -2 & 4 \\ -6 & 28 & -15 \\ 16 & -20 & 41 \end{pmatrix}$ (2)

   Welchen Wert muss a (mindestens) haben, damit bei einer iterativen Lösung des Gleichungssystems $C \cdot x = b$ mit Sicherheit Konvergenz erwartet werden kann?

3. Gegeben sei $A \cdot x = b$ ein lineares Gleichungssystem, mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \text{ und dem Vektor } b = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

im gestörten Gleichungssystem $A \cdot \tilde{x} = \tilde{b}$ weicht $\tilde{b}$ von b in jeder Komponente nicht mehr als 10% ab.

a) notieren Sie einen Vektor $\tilde{b}$, der die maximal erlaubte Abweichung von b aufweist (1)

b) berechnen Sie die Konditionszahl von A (3)

c) schätzen Sie den relativen und absoluten Fehler der Lösung des LGS ab. (4)
Verwenden Sie die ∞- Norm (Zeilensummennorm).

d) Die Lösung des Systems $A \cdot x = b$ ist $x = \begin{pmatrix} 2 \\ -0{,}5 \end{pmatrix}$. In welchem Bereich erwarten Sie (2)
nach Ihrer Fehlerschätzung aus b) die Lösungen $\tilde{x}$ des Systems $A \cdot \tilde{x} = \tilde{b}$.

4. a) Notieren Sie die Trapezsummenregel für das Integral $I = \int_a^b f_{(x)}\, dx$ (2)

b) Berechnen Sie $I = \int_0^2 2 \cdot e^{-x^2}\, dx$ nach der Trapezsummenregel. Teilen Sie dazu das (4)
Integral in 4 Teilintervalle.

c) skizzieren Sie die Funktion $f_{(x)} = 2 \cdot e^{-x^2}$ (2)

d) Welchen Wert erwarten Sie für das Integral $I = \int_{-2}^{2} f_{(x)}\, dx$ (2)

Hinweise und Klausurbedingungen:

- Schreiben Sie bitte deutlich und lesbar
- Geben Sie dieses Aufgabenblatt zusammen mit Ihren Lösungen ab.
- Beginnen Sie bitte jede Aufgabe auf einem neuen Blatt
- Schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen
- Die Herleitung der Lösung muss erkennbar sein, notieren Sie daher den Rechenweg.
- Bearbeitungszeit 90 Minuten
- Erlaubte Hilfsmittel: Taschenrechner, schriftliche Unterlagen

Bitte Unterschreiben
Mit meiner Unterschrift erkläre ich, dass ich

- mich gesundheitlich in der Lage fühle, an dieser Klausur teilzunehmen
- zu dieser Prüfungsleistung zugelassen bin
- diese Klausurarbeit selbständig verfasst habe
- keine anderen als die zugelassenen Hilfsmittel verwendet habe

Datum: ____________ Unterschrift: ________________________

Lösungen:

1. a) $x = -\frac{1}{11}x^3 + \frac{13}{22}x^2 + \frac{4}{11}$ bzw. $x = -0{,}0909x^3 + 0{,}5909x^2 - 0{,}3636$

b)

$x_0=0$	$x_{n+1} = -\frac{1}{11}x_n^3 + \frac{13}{22}x_n^2 + \frac{4}{11}$
x_1	0,363636
x_2	0,437401
x_3	0,469081

c) $x = \sqrt{\frac{2}{13}x^3 + \frac{22}{13}x - \frac{8}{13}}$ und $x = \sqrt[3]{\frac{13}{2}x^2 - 11x + 4}$

d) Bedingung $\left|F'_{(x)}\right| < 1$ $\quad F'_{(x)} = -\frac{3}{11}x^2 + \frac{13}{11}x$

$F'_{(0,5)} = \frac{23}{44} = 0{,}522722$ anziehend

$F'_{(2)} = \frac{14}{11} = 1{,}272727$ abstoßend

$F'_{(4)} = \frac{4}{11} = 0{,}363636$ anziehend

2. a) $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 8 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad R = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

b) L·R=A

c) $L \cdot y = b \quad y = \begin{pmatrix} 10 \\ 11 \\ 9 \end{pmatrix} \qquad R \cdot x = y \qquad x = \begin{pmatrix} 9 \\ 10 \\ 3 \end{pmatrix}$

d) diagonaldominant (Zeilensumme) wenn |a| > 6

3. a) z.B.: $b = \begin{pmatrix} 2{,}7 \\ 7{,}7 \end{pmatrix}$

b) $cond(A) = \|A^{-1}\| \cdot \|A\|$

$A^{-1} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$

∞-Norm $\|A\|_\infty = 6$ $\quad \|A^{-1}\|_\infty = 0{,}5$ $\quad$ cond(A) = 3

c) absoluter Fehler: $\|x - \tilde{x}\| \le \|A^{-1}\| \cdot \|b - \tilde{b}\|$

relativer Fehler: $\frac{\|x - \tilde{x}\|}{\|x\|} \le \|A^{-1}\| \cdot \|A\| \cdot \frac{\|b - \tilde{b}\|}{\|b\|}$

$\|b - \tilde{b}\|_\infty = 0{,}7$ $\quad \|b\|_\infty = 7$

absoluter Fehler $\|x - \tilde{x}\|_\infty = 0{,}5 \cdot 0{,}7 = 0{,}35$

relativer Fehler $\frac{\|x - \tilde{x}\|_\infty}{\|x\|_\infty} = 3 \cdot 0{,}7 / 7 = 0{,}3$

d) $\tilde{x}$ weicht von x in jeder Komponente um max. den absoluten Fehler ab und liegt damit zwischen $\tilde{x}_1 = \begin{pmatrix} 1{,}65 \\ -0{,}85 \end{pmatrix}$ und $\tilde{x}_2 = \begin{pmatrix} 2{,}35 \\ -0{,}15 \end{pmatrix}$

4. a) $I = h \cdot \left(\frac{f_{(a)} + f_{(b)}}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f_{(x_i)} \right)$

b) $I = 0{,}5 \cdot \left(\frac{f_{(0)}}{2} + f_{(0,5)} + f_{(1)} + f_{(1,5)} + \frac{f_{(2)}}{2} \right)$

$= (1{,}0000 + 1{,}5576 + 0{,}7358 + 0{,}2108 + 0{,}0183) \cdot 0{,}5 = 1{,}7612$

c) Glockenkurve Max(0;2), sym. zur Y-Achse, Asymptote X-Achse

d) I = 3,5225 wegen Symmetrie