

Name: _____

Punkte:**Note:**

Vorname: _____

Matr. Nr.: _____

1. Gegeben ist die Funktion $f_{(x)} = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$

- a) Schreiben Sie das Nullstellenproblem als Fixpunktgleichung. (Hinweis: lösen Sie die Gleichung nach dem linearen Term auf) (2)
- b) Führen Sie mit Ihrem Ergebnis aus a) eine Fixpunktiteration durch. Starten Sie mit $x_0=0$ und rechnen Sie bis x_3 . (3)
- c) Neben a) gibt es noch weitere mögliche Fixpunktgleichungen zu $f(x)$. Geben Sie zwei dieser Möglichkeiten an. (3)
- d) $f_{(x)}$ hat die Nullstellen $x_{01}=1$, $x_{02}=2$ und $x_{03}=3$ (2)
Prüfen Sie, ob es sich bezüglich Ihrer Gleichung unter a) um anziehende oder abstoßende Fixpunkte handelt.

2. Gegeben sei $A \cdot x = b$ ein lineares Gleichungssystem, mit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 4 & 5 & -7 \\ -8 & 5 & 19 \end{pmatrix} \text{ und } b = \begin{pmatrix} -19 \\ -59 \\ 183 \end{pmatrix}$$

- a) Führen Sie eine LR-Zerlegung der Koeffizientenmatrix A durch (3)
- b) Überprüfen Sie Ihr Ergebnis aus a) durch Multiplikation L·R (1)
- c) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem mittels der LR-Zerlegung aus a). (4)

- d) gegeben sei nun die Matrix $C = \begin{pmatrix} 15 & 1 & -3 \\ 4 & 12 & -7 \\ -8 & 5 & 2a+2 \end{pmatrix}$ (2)

Welchen Wert muss a (mindestens) haben, damit bei einer iterativen Lösung des Gleichungssystems $C \cdot x = b$ mit Sicherheit Konvergenz erwartet werden kann?

3. Gegeben sind die Stützpunkte

x_i	-2	1	2	4
y_i	3	0	-1	3

a) Diese Punkte sollen mit einem Polynom interpoliert werden. Welchen Grad hat das Interpolationspolynom? Stellen Sie ein Gleichungssystem zu dessen Bestimmung auf. (Hinweis: stellen Sie nur das LGS auf, Sie müssen es nicht lösen) (5)

b) Die Stützpunkte sollen mit kubischen Splines interpoliert werden. Wie viele Bedingungen benötigen Sie? (2)

c) Wie viele dieser Interpolationsbedingungen werden durch die Stützpunkte gegeben? (2)

d) Können die Punkte durch periodische Splines interpoliert werden? (1)

4. Die Funktion Cosinus hyperbolicus $\cosh(x)$ ist definiert durch $\cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$

a) Berechnen Sie $I = \int_0^2 2 \cdot \cosh(x) dx$ nach der Trapezsummenregel. Teilen Sie dazu das Integral in 4 Teilintervalle. (6)

b) Es gilt $\int \cosh(x) dx = \sinh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ (2)

Berechnen Sie damit den exakten Wert des Integrals $I = \int_0^2 2 \cdot \cosh(x) dx$

c) Geben Sie den relativen Fehler ihres Näherungswertes aus a) an. (2)

Hinweise und Klausurbedingungen:

- Schreiben Sie bitte deutlich und lesbar
- Geben Sie dieses Aufgabenblatt zusammen mit Ihren Lösungen ab.
- Beginnen Sie bitte jede Aufgabe auf einem neuen Blatt
- Schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen
- Die Herleitung der Lösung muss erkennbar sein, notieren Sie daher den Rechenweg.
- Bearbeitungszeit 90 Minuten
- Erlaubte Hilfsmittel: Taschenrechner, schriftliche Unterlagen

Bitte Unterschreiben

Mit meiner Unterschrift erkläre ich, dass ich

- mich gesundheitlich in der Lage fühle, an dieser Klausur teilzunehmen
- zu dieser Prüfungsleistung zugelassen bin
- diese Klausurarbeit selbständig verfasst habe
- keine anderen als die zugelassenen Hilfsmittel verwendet habe

Datum: _____ Unterschrift: _____

Lösungen:

1. a) $x = -\frac{1}{11}x^3 + \frac{6}{11}x^2 + \frac{6}{11}$ bzw. $x = -0,0909x^3 + 0,5454x^2 - 0,5454$

b)

$x_0=0$	$x_{n+1} = -\frac{1}{11}x_n^3 + \frac{6}{11}x_n^2 + \frac{6}{11}$
x_1	0,545454
x_2	0,692985
x_3	0,777143

c) $x = \sqrt{\frac{1}{6}x^3 + \frac{11}{6}x - 1}$ und $x = \sqrt[3]{6x^2 - 11x + 6}$

d) Bedingung $|F'_{(x)}| < 1$ $F'_{(x)} = -\frac{3}{11}x^2 + \frac{12}{11}x$

$$F'_{(1)} = \frac{9}{11} = 0,818181 \text{ anziehend}$$

$$F'_{(2)} = \frac{12}{11} = 1,090909 \text{ abstoßend}$$

$$F'_{(3)} = \frac{9}{11} = 0,818181 \text{ anziehend}$$

2. a) $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ $R = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$

b) $L \cdot R = A$

c) $L \cdot y = b$ $y = \begin{pmatrix} -19 \\ -21 \\ 170 \end{pmatrix}$ $R \cdot x = y$ $x = \begin{pmatrix} \frac{50}{3} \\ \frac{4}{-3} \\ \frac{3}{17} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16,66 \\ -1,33 \\ 17 \end{pmatrix}$

d) diagonaldominant (Spaltensumme) wenn $|2a+2| > 10 \Leftrightarrow a > 4$

3. a) Polynom 3. Grades $P(x)=ax^3+bx^2+cx+d$

$$\text{LGS: } -8a + 4b - 2c + d = 3$$

$$a + b + c + d = 0$$

$$8a + 4b + 2c + d = -1$$

$$64a + 16b + 4c + d = 3$$

b) $n=3$ Intervalle benötigen für die 3 Splines $4n=12$ Bedingungen

c) $4n-2=10$ Bedingungen, es sind also 2 Zusatzbedingungen notwendig

d) Ja, denn die Funktionswerte an den Rändern stimmen überein $f(-2)=f(4)$

$$4. a) I = h \cdot \left(\frac{f_{(a)} + f_{(b)}}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f_{(x_i)} \right)$$

$$I = 0,5 \cdot \left(\frac{f_{(0)}}{2} + f_{(0,5)} + f_{(1)} + f_{(1,5)} + \frac{f_{(2)}}{2} \right)$$

$$= 0,5 \cdot (1,0000 + 2,2553 + 3,0862 + 4,7048 + 3,7622) = 7,4042$$

$$b) I = (e^2 + e^{-2}) - (e^0 - e^{-0}) = 7,2537$$

$$d) \Delta I = \frac{7,4042 - 7,2537}{7,2537} = 0,0207 \approx 2,1\%$$