**Klausur Numerische Mathematik SS 2010 Prof. Dr. T. Wenisch** 100% = 40 Punkte

Name: ______________________________ **Punkte:** **Note:**

Vorname: ______________________________

Matr. Nr.: ______________________________

1. Gegeben ist die Funktion $f_{(x)} = x^3 + 10x^2 + 21x$

   a) Schreiben Sie das Nullstellenproblem als Fixpunktgleichung. (Hinweis: lösen Sie die Gleichung nach dem linearen Term auf) (1)

   b) Führen Sie mit Ihrem Ergebnis aus a) eine Fixpunktiteration durch. Starten Sie mit $x_0$= -3,5 und rechnen Sie bis $x_3$. (3)

   c) $f_{(x)}$ hat die Nullstellen $x_{01}$= 0 , $x_{02}$= -3 und $x_{03}$= -7. Welche dieser Nullstellen können mit der Iterationsvorschrift aus a) bestimmt werden? (3)

   d) Wie lautet für die Funktion f(x) die Berechnungsvorschrift für das Newton-Verfahren ? Welche der Nullstellen könnten damit berechnet werden? (3)

2. Gegeben sei $A \cdot x = b$ ein lineares Gleichungssystem, mit

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -7 \\ -14 \end{pmatrix}$$

   a) Führen Sie eine LR-Zerlegung der Koeffizientenmatrix A durch und bestimmen Sie damit die Lösung des Gleichungssystems. (4)

   b) Notieren Sie das Gleichungssystem durch eine geeignete Vertauschung so, dass bei einer iterativen Lösung Konvergenz zu erwarten ist (2)

   c) Geben Sie für das Gleichungssystem aus b) eine Iterationsvorschrift zur Lösung nach dem Gauß-Seidel-Verfahren (Einzelschrittverfahren) an (2)

   d) Beginnen Sie die Iteration aus c) mit dem Startvektor $x^{(0)} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix}$ und berechnen Sie die erste Iterierte $x^{(1)}$. (2)

3. Gegeben sind die Stützpunkte

| $x_i$ | -1 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $y_i$ | -16 | 0 | 8 | 40 |

a) Diese Punkte sollen mit einem Polynom interpoliert werden. Welchen Grad kann das Interpolationspolynom höchstens besitzen? (1)

b) Stellen Sie zu den gegebenen Werten das Interpolationspolynom mit Hilfe der Newton-Polynome auf. Verwenden Sie dazu das Schema der dividierten Differenzen (5)

c) Überführen Sie das Polynom von der Newtonform in die Normalform. Verwenden Sie dazu das modifizierte Horner-Schema (alternativ können Sie das Polynom auch ausmultiplizieren) (3)

d) Berechnen Sie mittels des Polynoms aus c) den interpolierten Y-Wert an der Stelle x=0. (1)

4. Das Integral $I = \int_0^{\pi} \sin(x)\, dx$ soll berechnet werden.

a) Berechnen Sie das Integral nach der Simpsonformel. Teilen Sie dazu das Integral in 4 Teilintervalle. (Berechnung der Funktionswerte im Winkelmodus Radiant: RAD) (4)

b) Führen Sie eine Fehlerabschätzung des Ergebnisses aus a) durch. (2)

c) Berechnen Sie analytisch exakten Wert des Integrals. (2)

d) Bestimmen Sie mit dem Ergebnis aus c) den Fehler der numerischen Integration aus a) und vergleichen Sie diesen mit der Fehlerabschätzung aus b). (2)

**Hinweise und Klausurbedingungen:**

- o Schreiben Sie bitte deutlich und lesbar
- o Geben Sie dieses Aufgabenblatt zusammen mit Ihren Lösungen ab.
- o Beginnen Sie bitte jede Aufgabe auf einem neuen Blatt
- o Schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen
- o Die Herleitung der Lösung muss erkennbar sein, notieren Sie daher den Rechenweg.
- Bearbeitungszeit 90 Minuten
- Erlaubte Hilfsmittel: Taschenrechner, schriftliche Unterlagen

**Bitte Unterschreiben**

Mit meiner Unterschrift erkläre ich, dass ich

- mich gesundheitlich in der Lage fühle, an dieser Klausur teilzunehmen
- zu dieser Prüfungsleistung zugelassen bin
- diese Klausurarbeit selbständig verfasst habe
- keine anderen als die zugelassenen Hilfsmittel verwendet habe

Datum: ____________ Unterschrift: __________________________

**Lösungen:**

1. a) $x = -\frac{1}{21}x^3 - \frac{10}{21}x^2$ bzw. $x = -0{,}04762\,x^3 - 0{,}47619\ x^2$

b)

| $x_0$= -3,5 | $x_{n+1} = -\frac{1}{21}x_n^3 - \frac{10}{21}x_n^2$ |
|---|---|
| $x_1$ | - 3,791666 |
| $x_2$ | - 4,250265 |
| $x_3$ | - 4,946073 |

c) Bedingung $\left|F'_{(x)}\right| < 1$ $\quad F'_{(x)} = -\frac{1}{7}x^2 - \frac{20}{21}x$

$F'_{(0)} = 0$ anziehend

$F'_{(-3)} = \frac{11}{7} = 1{,}5714$ abstoßend

$F'_{(-7)} = -\frac{1}{3} = -0{,}3333$ anziehend

d) $x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 + 10x_n^2 + 21x_n}{3x_n^2 + 20x_n + 21}$ damit können alle Nullstellen berechnet werden

2. a) $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad R = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & -11 & -2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

$L \cdot y = b \quad y = \begin{pmatrix} 6 \\ -25 \\ -20 \end{pmatrix} \qquad R \cdot x = y \qquad x = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$

b)

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 6 \\ -14 \end{pmatrix}$$ Zeilensummenkriterium erfüllt

c)

$$x_1^{(n+1)} = -\frac{7}{3} - \frac{1}{4}x_2^{(n)} - \frac{1}{3}x_3^{(n)}$$
$$x_2^{(n+1)} = \frac{3}{2} - \frac{1}{4}x_1^{(n+1)} - \frac{1}{4}x_3^{(n)}$$
$$x_3^{(n+1)} = -\frac{7}{3} - \frac{1}{6}x_1^{(n+1)} - \frac{2}{3}x_2^{(n+1)}$$

d) $x^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2{,}5 \\ -4 \end{pmatrix}$

3. a) n=3 Polynom 3. Grades $P(x)=ax^3+bx^2+cx+d$

b)

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| -1 | **-16** | | | |
| | | (0-(-16))/(1-(-1))=**8** | | |
| 1 | 0 | | (8-8)/(2-(-1)=**0** | |
| | | (8-0)/(2-1)=8 | | (12-0)/(3-(-1)=**3** |
| 2 | 8 | | (32-8)/(3-1)=12 | |
| | | (40-8)/(3-2)=32 | | |
| 3 | 40 | | | |

$$p(x) = -16 + 8(x+1) + 0(x+1)(x-1) + 3(x+1)(x-1)(x-2)$$

c) modifiziertes Horner-Schema

$$p(x) = 3(x+1)(x-1)(x-2) + 0(x+1)(x-1) + 8(x+1) - 16$$

| | | | |
|---|---|---|---|
| $C_3=3$ x=-2 | $C_2=0$ x=-1 | $C_1=8$ x=1 | $C_0=-16$ |
| | -6 | 6 | 14 |
| 3 x=-1 | -6 x=1 | 14 | **-2**=$a_0$ |
| | -3 | -9 | |
| 3 x=1 | -9 | **5**=$a_1$ | |
| | 3 | | |
| 3 | **-6**=$a_2$ | | |
| **3**=$a_3$ | | | |

$$p(x) = 3x^3 - 6x^2 + 5x - 2$$

d) Y=-2

4. a) $I = \frac{h}{3} \cdot \left( f(a) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + f(b) \right)$

$$I = \frac{\pi}{12}\left( \sin(0) + 4\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + 2\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + 4\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) + \sin(\pi) \right)$$

$$I = \frac{\pi}{12}\left( 0 + 4 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2} + 2 \cdot 1 + 4 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2} + 0 \right)$$

I=0,2618·(0+2,82843+2+2,82843+0)=2,00456

b) $\Delta I \le \frac{b-a}{180} \cdot \max_{x\in[a,b]} \left| f^{(4)}(x) \right| \cdot h^4$ $\quad f^{(4)}(x)=\sin(x)$ $\quad \max|f^{(4)}(x)|=1$

$$\Delta I \le \frac{\pi - 0}{180} \cdot 1 \cdot \left(\frac{\pi}{4}\right)^4 = \frac{\pi^5}{180 \cdot 256} = 0{,}00664105$$

c) $\int_0^{\pi} \sin(x)\,dx = \left| -\cos(x) \right|_0^{\pi} = 1 - (-1) = 2$

d) $\Delta I$=0,00456 ist kleiner als die Abschätzung aus b) mit 0,00664