

Name: _____

Punkte:**Note:**

Vorname: _____

Matr. Nr.: _____

1. Gegeben sei $A \cdot x = b$ ein lineares Gleichungssystem, mit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 4 & 6 & 2 \\ -2 & 7 & -4 \end{pmatrix} \text{ und } b = \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \\ 6 \end{pmatrix}$$

- a) Führen Sie eine LR-Zerlegung der Koeffizientenmatrix A durch (3)
- b) Überprüfen Sie Ihr Ergebnis aus a) durch Multiplikation L·R (1)
- c) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem mittels der LR-Zerlegung aus a). (4)
- d) Würden Sie bei einer iterativen Lösung des Gleichungssystems Konvergenz erwarten? Begründen Sie Ihre Antwort. (2)

2. Die Punkte

x_i	1	2	3
y_i	4	1	6

sollen mit kubischen Splines interpoliert werden.

- a) Stellen Sie die Bedingungen für eine Interpolation mit natürlichen Splines auf. (6)
(Hinweis: stellen Sie nur das LGS auf, Sie müssen es nicht lösen und die Splines nicht berechnen)
- b) Für die Interpolation werden die folgenden kubische Splinefunktionen gefunden: (2)
- $$s_1(x) = 2x^3 - 6x^2 + x + \lambda \quad [1;2]$$
- $$s_2(x) = -2x^3 + 18x^2 - 47x + \mu \quad [2;3]$$
- Bestimmen Sie die Werte λ und μ .
- c) Könnten Sie die Werte auch mit periodischen Splines interpolieren? (2)
Begründen Sie Ihre Antwort.

3. Gegeben ist die Funktion $f_{(x)} = x^3 - 2x^2 + 4x + 8$

a) Skizzieren Sie die Funktion im Intervall $[-2 ; +2]$. (2)

b) Bestimmen Sie mit einem Verfahren Ihrer Wahl eine Nullstelle der Funktion mit einer Genauigkeit von 2 Dezimalstellen.. (8)
(Dokumentieren Sie das verwendete Verfahren und den Lösungsweg. Nur die Angabe der Nullstelle ist nicht ausreichend!).

4. Numerische Integration:

a) Berechnen Sie $I = \int_1^2 \ln(x) dx$ nach der Trapezsummenregel. Teilen Sie dazu das Integral in 5 Teilintervalle. (6)

b) Es gilt $\int \ln(x) dx = x \cdot (\ln(x) - 1)$ (2)

Berechnen Sie damit den exakten Wert des Integrals $I = \int_1^2 \ln(x) dx$

c) Geben Sie den relativen Fehler ihres Näherungswertes aus a) an. (2)

Hinweise und Klausurbedingungen:

- Schreiben Sie bitte deutlich und lesbar
- Geben Sie dieses Aufgabenblatt zusammen mit Ihren Lösungen ab.
- Beginnen Sie bitte jede Aufgabe auf einem neuen Blatt
- Schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen
- Die Herleitung der Lösung muss erkennbar sein, notieren Sie daher den Rechenweg.
- Bearbeitungszeit 90 Minuten
- Erlaubte Hilfsmittel: Taschenrechner, schriftliche Unterlagen

Bitte Unterschreiben

Mit meiner Unterschrift erkläre ich, dass ich

- mich gesundheitlich in der Lage fühle, an dieser Klausur teilzunehmen
- zu dieser Prüfungsleistung zugelassen bin
- diese Klausurarbeit selbständig verfasst habe
- keine anderen als die zugelassenen Hilfsmittel verwendet habe

Datum: _____ Unterschrift: _____

Lösungen:

$$1. \text{ a) } L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad R = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

b) $L \cdot R = A$

$$c) \quad L \cdot y = b \quad y = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} \quad R \cdot x = y \quad x = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

d) keine Konvergenz zu erwarten, weder Zeilen- noch Spaltensummenkriterium erfüllt.

$$2. \text{ a) kubischer Spline: } \quad s_{(x)} = ax^3 + bx^2 + cx + d$$
$$s'_{(x)} = 3ax^2 + 2bx + c$$
$$s''_{(x)} = 6ax + 2b$$

Bedingungen:

Punkte

$$s_1(1) = 4 \quad \Leftrightarrow \quad a_1 + b_1 + c_1 + d_1 = 4$$

$$s_1(2) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad 8a_1 + 4b_1 + 2c_1 + d_1 = 1$$

$$s_2(2) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad 8a_2 + 4b_2 + 2c_2 + d_2 = 1$$

$$s_2(3) = 6 \quad \Leftrightarrow \quad 27a_2 + 9b_2 + 3c_2 + d_2 = 6$$

Steigung

$$s_1'(2) = s_2'(2) \quad \Leftrightarrow \quad 12a_1 + 4b_1 + c_1 = 12a_2 + 4b_2 + c_2$$

Krümmung

$$s_1''(2) = s_2''(2) \quad \Leftrightarrow \quad 12a_1 + 2b_1 = 12a_2 + 2b_2$$

natürlicher Spline

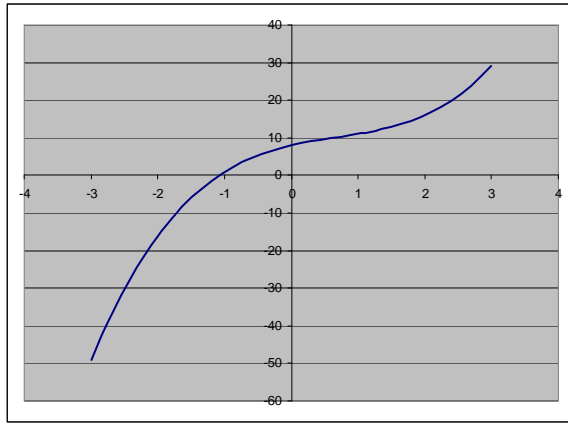
$$s_1''(1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 6a_1 + 2b_1 = 0$$

$$s_2''(3) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 18a_2 + 2b_2 = 0$$

b) $\lambda = 7$; $\mu = 39$ (x-Werte und y-Werte der Stützpunkte in Splinefkt. einsetzen)

c) nein, $y_1 \neq y_3$

3. a)



b) $x_0 = -1,0874$ berechnet z.B. mit Newton-Verfahren $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x)}{f'(x)}$

4. a) $I = h \cdot \left(\frac{f(a) + f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) \right)$

$$I = 0,2 \cdot \left(\frac{f_{(1)}}{2} + f_{(1,2)} + f_{(1,4)} + f_{(1,6)} + f_{(1,8)} + \frac{f_{(2)}}{2} \right)$$
$$= 0,2 \cdot (0,00000 + 0,18232 + 0,33647 + 0,47000 + 0,58779) = 0,38463$$

b) $I = 2 \ln(2) - 1 = 0,38629$

d) $\Delta I = \frac{0,38629 - 0,38463}{0,38629} = 0,00430 \approx 0,4\%$