Klausur **Numerische Mathematik** **WS 2010/11** **Prof. Dr. T. Wenisch** 100% = 40 Punkte

Name: ______________________________ **Punkte:** **Note:**

Vorname: ______________________________

Matr. Nr.: ______________________________

1. Gegeben ist die Funktion $f_{(x)} = x^3 - \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{16}x + \frac{1}{128}$

   a) Schreiben Sie das Nullstellenproblem als Fixpunktgleichung. (Hinweis: lösen Sie die Gleichung nach dem linearen Term auf) (2)

   b) Führen Sie mit Ihrem Ergebnis aus a) eine Fixpunktiteration durch. Starten Sie mit x_0=0,2 und rechnen Sie bis x_3. (3)

   c) Neben a) gibt es noch weitere mögliche Fixpunktgleichungen zu f(x). Geben Sie zwei dieser Möglichkeiten an. (3)

   d) $f_{(x)}$ hat die Nullstellen x_{01}= - 1/4 , x_{02}= 1/4 und x_{03}= 1/8 Prüfen Sie, ob es sich bezüglich Ihrer Gleichung unter a) um anziehende oder abstoßende Fixpunkte handelt. (2)

2. Gegeben sei $A \cdot x = b$ ein lineares Gleichungssystem, mit

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 2+a \\ 21 & 19 & 6+5a \\ -14 & 34 & -4+9a \end{pmatrix} \text{ und } b = \begin{pmatrix} -10 \\ -26 \\ 42 \end{pmatrix} \qquad a \in R$$

   a) Führen Sie eine LR-Zerlegung der Koeffizientenmatrix A durch (4)

   b) Überprüfen Sie Ihr Ergebnis aus a) durch Multiplikation L·R (1)

   c) Erwarten Sie bei einer iterativen Lösung des Gleichungssystems Konvergenz ? Begründen Sie Ihre Antwort. (2)

   d) Es sei a = 2. Lösen Sie das lineare Gleichungssystem mittels der LR-Zerlegung aus a). (3)

3. Gegeben sind die Stützpunkte

x_i	-2	0	1
y_i	21	5	6

a) Diese Punkte sollen mit einem <u>Polynom</u> interpoliert werden. Welchen Grad erwarten Sie für das Interpolationspolynom? Stellen Sie ein Gleichungssystem zu dessen Bestimmung auf und ermitteln Sie das Polynom. (6)

b) Die Stützpunkte sollen mit <u>kubischen Splines</u> interpoliert werden. Wie viele Bedingungen benötigen Sie? (2)

c) Wie viele dieser Interpolationsbedingungen werden durch die Stützpunkte gegeben? (1)

d) Können die Punkte durch periodische Splines interpoliert werden? (1)

4. Gegeben ist die Funktion $f_{(x)} = \sqrt{x-2}$

a) Berechnen Sie $I = \int_2^4 f(x)\,dx$ nach der Trapezsummenregel. Teilen Sie dazu das Integral in 5 Teilintervalle. (6)

b) Für $f_{(x)} = \sqrt{x-2}$ ist die Stammfunkton $F_{(x)} = \frac{2}{3}\left(\sqrt{x-2}\right)^3$ (2)

Berechnen Sie damit den exakten Wert des Integrals $I = \int_2^4 \sqrt{x-2}\,dx$

c) Geben Sie den relativen Fehler ihres Näherungswertes aus a) an. (2)

Hinweise und Klausurbedingungen:

- Schreiben Sie bitte deutlich und lesbar
- Geben Sie dieses Aufgabenblatt zusammen mit Ihren Lösungen ab.
- Beginnen Sie bitte jede Aufgabe auf einem neuen Blatt
- Schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen
- Die Herleitung der Lösung muss erkennbar sein, notieren Sie daher den Rechenweg.
- Bearbeitungszeit 90 Minuten
- Erlaubte Hilfsmittel: Taschenrechner, schriftliche Unterlagen

Bitte Unterschreiben

Mit meiner Unterschrift erkläre ich, dass ich

- mich gesundheitlich in der Lage fühle, an dieser Klausur teilzunehmen
- zu dieser Prüfungsleistung zugelassen bin
- diese Klausurarbeit selbständig verfasst habe
- keine anderen als die zugelassenen Hilfsmittel verwendet habe

Datum: _____________ Unterschrift: ___________________________

Lösungen:

1. a) $x = 16x^3 - 2x^2 + 0{,}125$ bzw.

b)

x_0=0	$x_{n+1} = 16x_n^3 - 2x_n^2 + 0{,}125$
x_1	0,173000
x_2	0,147985
x_3	0,133054

c) $x = \sqrt{8x^3 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{16}}$ und $x = \sqrt[3]{\frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x - \frac{1}{128}}$

d) Bedingung $|F'_{(x)}| < 1$ $F'_{(x)} = 48x^2 - 4x$

$F'_{(-1/4)} = 4$ abstoßend
$F'_{(1/4)} = 2$ abstoßend
$F'_{(1/8)} = \frac{1}{4}$ anziehend

2. a) $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ $R = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 2+a \\ 0 & 10 & 2a \\ 0 & 0 & 3a \end{pmatrix}$

b) L·R=A

c) nein, die Matrix ist für keinen Wert von a diagonaldominant, siehe 2. Zeile bzw. Spalte

d) $L \cdot y = b$ $y = \begin{pmatrix} -10 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$ $R \cdot x = y$ $x = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

3. a) Polynom 2. Grades $P(x)=ax^2+bx+c$

LGS:

$$\begin{aligned} 4a - 2b + c &= 21 \\ c &= 5 \\ a + b + c &= 6 \end{aligned}$$

$P(x) = 3x^2 - 2x + 5$

b) n=2 Intervalle benötigen für die 2 Splines 4n=8 Bedingungen

c) 4n-2=6 Bedingungen, es sind also 2 Zusatzbedingungen notwendig

d) Nein, denn die Funktionswerte an den Rändern stimmen nicht überein $f(-2)\neq f(1)$

4. a) $$I = h \cdot \left(\frac{f_{(a)} + f_{(b)}}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f_{(x_i)} \right)$$

$$I = 0{,}4 \cdot \left(\frac{f_{(2)}}{2} + f_{(2,4)} + f_{(2,8)} + f_{(3,2)} + f_{(3,6)} + \frac{f_{(4)}}{2} \right)$$

$= 0{,}4 \cdot (0{,}0000 + 0{,}6325 + 0{,}8944 + 1{,}0954 + 1{,}2649 + 0{,}7071) = 1{,}8377$

b) I = 1,8856

d) $$\Delta I = \frac{1{,}8856 - 1{,}8377}{1{,}8856} = 0{,}0254 \approx 2{,}5\%$$