1. Die Zahl pi werde auf 3 bzw. auf 5 Stellen gerundet. Geben Sie den absoluten und den relativen Rundungsfehler an.

2. Bei einem Würfel mit der Kantenlänge 1 m wird die Länge der Kanten mit der Genauigkeit von 1 mm gemessen. Geben Sie den relativen Fehler der Längenmessung sowie den absoluten Fehler des Volumens an.

3 Das bestimmte Integral

$$I_n = \frac{1}{e}\int_0^1 x^n e^x \, dx$$

Kann mit folgender Rekursionsvorschrift berechnet werden

$$I_0 = 1 - \frac{1}{e} \qquad I_k = 1 - k \cdot I_{k-1} \qquad \text{mit } k = 1, 2 \ \ldots\ldots$$

a) berechnen Sie $I_1 \ldots\ldots 1_{20}$. Bei der Rechnung soll jedes Zwischenergebnis auf 3 bzw. 5 Stellen nach demKomma gerundet werden (Simulation einer Festkomma-Rechnung mit 3 bzw. 5 Nachkommastellen).. Vergleichen Sie die Ergebnisse.

b) Wiederholen Sie die Rechnung aus Aufgabenstellung a), indem Sie jedes Zwischenergebnis auf 3 bzw. 5 Mantissenstellen runden (Simulation einer Gleitkomma-Rechnung mit 3 bzw. 5 Mantissenstellen).

c) Führen Sie die Rechnung von Aufgabenstellung a) in einem Programm für unterschiedliche Datentypen (unterschiedliche Genauigkeit) durch.

4. a) Berechnen Sie den Wert des Polynoms
$1.0837x^4 + 2.7911x^3 + 0.75149x^2 - 5.8205x - 7.6123$
für x = 1.4935 nach den folgenden Algorithmen:
Algorithmus 1:

$y_1 = x$
$y_2 = x \cdot y_1$
$y_3 = x \cdot y_2$
$y_4 = x \cdot y_3$
$y = 1.0837y_4 + 2.7911y_3 + 0.75149y_2 - 5.8205y - 7.6123$

Algorithmus 2 (HORNER-Schema):

$y_1 = 1.0837 \cdot x$
$y_2 = (y_1 + 2.7911) \cdot x$
$y_3 = (y_2 + 0.75149) \cdot x$
$y_4 = (y_3 - 5.8205) \cdot x$

$y = y_4 - 7.6123$

Rechnung mit selbst geschriebenen Programm oder Taschenrechner.

b) Vergleichen Sie beide Algorithmen bezüglich des Rechenaufwands und des Speicherbedarfs.

5. Gegeben sind die Funktionen

$$y_1 = \sqrt{1+x} - \sqrt{1-x} \quad \text{und} \quad y_2 = \frac{2x}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}$$

a) Zeigen Sie durch durch geeignete Umformung, dass im Definitionsbereich y1(x) = y2(x) gilt.

b) Berechnen Sie für x = 10^{-1}, 10^{-2}, ..., 10^{-20} die Funktionswerte $y_1(x)$ und $y_2(x)$ mit dem Taschenrechner oder einem selbst geschriebenem Programm und interpretieren Sie die numerischen Ergebnisse.

6. Die betragskleinste Nullstelle einer quadratischen Funktiom

$x^2 + 2px + q = 0$

kann mit den Vorschriften

$$x_0 = -p + \sqrt{p^2 - q} \quad \text{oder} \quad x_0 = -\frac{q}{p + \sqrt{p^2 - q}}$$

Berechnet werden.

Zeigen Sie die Äquivalenz beider Vorschriften und berechnen Sie x_0 jeweils mit den Werten p=999 und q = 10^{-1}, 10^{-2}, ..., 10^{-20}.

7. Es gilt

$$e^x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x^i}{i\,!} \qquad \text{(Taylorentwicklung)}$$

c) Berechnen Sie näherungsweise e^{-10} durch Summation der ersten n Glieder dieser Reihe. Vergleichen Sie das Ergebnis mit dem exakten Wert.

d) Berechnen Sie näherungsweise e^{-10}, indem Sie durch Summation der ersten n Glieder e^{10} näherungsweise berechnen und folgende Beziehung nutzen:

$$e^{-x} = \frac{1}{e^x}$$