EXKURS : Rückblick auf Grundlagen der Differentialrechnung

Definition der Ableitung (Differentialquotient)

$$f_{(x)} = \lim_{h \to 0} \frac{f_{(x+h)} - f_{(x)}}{h}$$

Grundableitungen

$f_{(x)}$	$f'_{(x)}$
x^n	$n \cdot x^{n-1}$
sin(x)	cos(x)
cos(x)	-sin(x)
e^x	e^x
ln(x)	$\frac{1}{x}$

Ableitungsregeln

Produktregel

$$f_{(x)} = u_{(x)} \cdot v_{(x)} \qquad f'_{(x)} = u'_{(X)} \cdot v_{(x)} + u_{(x)} \cdot v'_{(x)}$$

Beispiel

$$f_{(x)} = x^2 \cdot \sin(x) \qquad f'_{(x)} = 2x \cdot \sin(x) + x^2 \cdot \cos(x)$$

Quotientenregel

$$f_{(x)} = \frac{u_{(x)}}{v_{(x)}} \qquad f'_{(x)} = \frac{u'_{(X)} \cdot v_{(x)} - u_{(x)} \cdot v'_{(x)}}{\left(v_{(x)}\right)^2}$$

Beispiel

$$f_{(x)} = \frac{x^2 - 3x}{4x - 2} \qquad f'_{(x)} = \frac{(2x-3) \cdot (4x-2) - (x^2 - 3x) \cdot 4}{(4x-2)^2}$$

Kettenregel

$$f_{(x)} = g\left(h_{(x)}\right) \qquad f'_{(x)} = g'\left(h_{(X)}\right) \cdot h'_{(x)}$$

Beispiel

$$f_{(x)} = \sin(x^3 - 5x) \qquad f'_{(x)} = \cos(x^3 - 5x) \cdot (3x^2 - 5)$$

Aufgaben ⇨

Ableitungen:

Bestimmen Sie von den folgenden Funktionen die 1. und 2. Ableitungsfunktion ($f'_{(x)}$ und $f''_{(x)}$). Geben Sie auch den (größtmöglichen) Definitionsbereich der Funktionen sowie der Ableitungsfunktionen an.

a) $f: x \mapsto x^8 + 5x^4 - 3x^3 - 4$

b) $f: x \mapsto (x^2 + 3) \cdot e^x$

c) $f: x \mapsto \dfrac{x^3 + x - 1}{x^2 - 1}$

d) $f: x \mapsto \dfrac{1}{x} \cdot \ln x$

e) $f: x \mapsto x^2 \cdot |x|$

f) $f: x \mapsto (2x - 7)^{16}$

g) $f: x \mapsto \ln(2x^2 + 7)$

h) $f: t \mapsto e^{-t^2}$.

Lösungen:

a) $f'(x) = 8x^7 + 20x^3 - 9x^2$, $f''(x) = 56x^6 + 60x^2 - 18x$, $D_0 = D_1 = D_2 = \mathbb{R}$;

b) $f'(x) = (x^2 + 2x + 3)e^x$, $f''(x) = (x^2 + 4x + 5)e^x$, $D_0 = D_1 = D_2 = \mathbb{R}$;

c) $f'(x) = \dfrac{x^4 - 4x^2 + 2x - 1}{(x^2 - 1)^2}$, $f''(x) = \dfrac{2(2x^3 - 3x^2 + 6x - 1)}{(x^2 - 1)^3}$, $D_0 = D_1 = D_2 = \mathbb{R}\setminus\{-1, 1\}$;

d) $f'(x) = \dfrac{1}{x^2} \cdot (1 - \ln x)$, $f''(x) = \dfrac{1}{x^3} \cdot (-3 + 2\ln x)$, $D_0 = D_1 = D_2 = \mathbb{R}^+$.

e) Beachtet man $(|x|)' = \operatorname{sgn} x$ für $x \neq 0$ und $x \cdot \operatorname{sgn} x = |x| \Rightarrow f'(x) = 3x|x|$, $f''(x) = 6|x|$, $D_0 = D_1 = D_2 = \mathbb{R}$, die Stelle $x = 0$ muß getrennt untersucht werden;

f) $f'(x) = 32(2x - 7)^{15}$, $f''(x) = 960(2x - 7)^{14}$, $D_0 = D_1 = D_2 = \mathbb{R}$;

g) $f'(x) = \dfrac{4x}{2x^2 + 7}$, $f''(x) = \dfrac{4(7 - 2x^2)}{(2x^2 + 7)^2}$, $D_0 = D_1 = D_2 = \mathbb{R}$;

h) $f'(t) = -2te^{-t^2}$, $f''(t) = -2(1 - 2t^2)e^{-t^2}$, $D_0 = D_1 = D_2 = \mathbb{R}$.