1. Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 4 \\ -14 & 38 & 22 \\ 6 & -9 & -27 \end{pmatrix}$$

a) Führen Sie für die Matrix A eine LR Zerlegung durch

b) Überprüfen Sie Ihr Ergebnis aus a durch Multiplikation L·R

c) Lösen Sie das Gleichungssystem

$$A \cdot \vec{x} = \vec{b} \quad \text{mit} \quad \vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 40 \\ 75 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 16 \\ 82 \\ -120 \end{pmatrix}$$

mittels der LR-Zerlegung aus a.

2. gegeben ist der Vektor

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie die drei gebräuchlichen Vektornormen:

a) 1-Norm, Summennorm $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$

b) 2-Norm, euklidische Norm $\|x\|_2 \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$

a) ∞-Norm, Maximumnorm $\|x\|_\infty = \max_{i=1,\ldots,n} |x_i|$

3. gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \\ -4 & 7 & 2 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie die beiden Matrixnormen:

a) 1-Norm, Spaltensummennorm $\|x\|_1 = \max_{j=1,\dots,n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$

a) ∞-Norm, Zeilensummennorm $\|x\|_\infty = \max_{1=1,\dots,n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$

4. Gegeben ist das lineare Gleichungssystem

$$12x_1 + 6x_2 + 4x_3 = 36$$
$$4x_1 + 11x_2 + 6x_3 = 44$$
$$-4x_1 + 7x_2 + 15x_3 = 55$$

Bestimmen Sie Lösung durch Iteration

a) nach dem Gesamtschrittverfahren

b) nach dem Einzelschrittverfahren

c) vergleichen Sie die Konvergenzgeschwindigkeit von a und b

d) wiederholen Sie die Iteration mit verschiedenen Startvektoren

e) schreiben Sie ein Programm, das die Lösung des LGS mit einer Genauigkeit von 10^{-5} bestimmt.

Lösung:

1. a) $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ $R = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 4 \\ 0 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ b). (-1 ; 3 ; -4) (-5 ; -2 ; 4)

2. a) 10 b) $\sqrt{38}$ c) 5

3. a) 10 b) 13

4. (1 ; 2; 3)