1. Gegeben sei das Gleichungssystem $A \cdot x = b$, mit

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \text{ und der Vektor } b = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

im gestörten Gleichungssystem $A \cdot \tilde{x} = \tilde{b}$ weicht $\tilde{b}$ von b in jeder Komponente nicht mehr als 10% ab.

a) berechnen Sie die Konditionszahl von A

b) schätzen Sie den relativen und absoluten Fehler der Lösung des LGS ab,
unter Verwendung der
b_1) 1- Norm (Spaltensummennorm)
b_2) ∞- Norm (Zeilensummennorm)

c) lösen Sie das System $A \cdot x = b$

d) lösen Sie das System $A \cdot \tilde{x} = \tilde{b}$ mit $\tilde{b} = \begin{pmatrix} 5{,}4 \\ 2{,}2 \end{pmatrix}$

e) berechnen Sie den relativen und absoluten Fehler und vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit der Schätzung aus b).

2. Gegeben sind die Matrizen

$$A_1 = \begin{pmatrix} -4 & 5 & 4 \\ -1 & 8 & 2 \\ 3 & -9 & -7 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A_2 = \begin{pmatrix} -14 & 6 & 4 \\ -3 & 8 & 2 \\ 2 & -1 & -7 \end{pmatrix}$$

sowie der der Vektor $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$

a) Prüfen Sie, ob bei einer iterativen Lösung des Gleichungssystems $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ Konvergenz zu erwarten ist.

b) Versuchen Sie für beide Matrizen eine iterative Lösung des LGS nach dem Jacobi- und dem Gauss-Seidel-Verfahren zu finden.

3. finden Sie für die Werte

x	-2	-1	1	2
f(x)	-10	8	2	2

ein Näherungspolynom.

Lösung:

1. a) $cond(A) = \|A^{-1}\| \cdot \|A\|$

$$A^{-1} = \frac{1}{48}\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 1 & 9 \end{pmatrix}$$

1-Norm $\|A\|_1$ = 10 $\quad \|A^{-1}\|_1$ = 0,25 $\quad$ cond(A) = 2,5

∞-Norm $\|A\|_\infty$ = 12 $\quad \|A^{-1}\|_\infty$ = 10/48 $\quad$ cond(A) = 2,5

b) absoluter Fehler: $\|x - \tilde{x}\| \le \|A^{-1}\| \cdot \|b - \tilde{b}\|$

relativer Fehler: $\frac{\|x - \tilde{x}\|}{\|x\|} \le \|A^{-1}\| \cdot \|A\| \cdot \frac{\|b - \tilde{b}\|}{\|b\|}$

b₁) $\|b - \tilde{b}\|_1$ = 0,8 $\quad \|b\|_1$ = 8

absoluter Fehler $\|x - \tilde{x}\|_1$ = 0,25·0,8 = 0,2

relativer Fehler $\frac{\|x - \tilde{x}\|_1}{\|x\|_1}$ = 2,5·0,8 / 8 = 0,25

b₂) $\|b - \tilde{b}\|_\infty$ = 0,6 $\quad \|b\|_\infty$ = 6

absoluter Fehler $\|x - \tilde{x}\|_\infty$ = 10/48·0,6 = 0,125

relativer Fehler $\frac{\|x - \tilde{x}\|_\infty}{\|x\|_\infty}$ = 2,5·0,6 / 6 = 0,25

c) $x = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$ $\quad$ d) $\tilde{x} = \begin{pmatrix} 17/40 \\ 21/40 \end{pmatrix}$

e) $x - \tilde{x} = \begin{pmatrix} 1/2 - 17/40 \\ 1/2 - 21/40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}075 \\ -0{,}025 \end{pmatrix}$ $\quad \|x - \tilde{x}\|_1$ = 0,1 $\quad \|x - \tilde{x}\|_\infty$ = 0,075

Die Fehler liegen innerhalb der abgeschätzten Grenzen.

2. a) konvergiert mit Sicherheit für A_2 (diagonaldominant)

b) A_1: konvergiert im Einzelschrittverfahren gegen (-2,2588 ; 1,0459 ; -3,310)
A_2: (-0,069 ; 0,7558; -1,1279)

3. $f_{(x)} = 2x^3 - 3x^2 - 5x + 8$