A

Name, Vorname: **Punkte:** **Note:**

Matr.-Nr.: **Studienfach:**

1. Berechnen Sie die inverse Matrix von (4)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

2. Lösen Sie das Gleichungssystem mit einer Methode Ihrer Wahl. (4)
   (Hinweis: beachten Sie Aufgabe 1)

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 1 \\ 2x_1 + 4x_3 &= 2 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 &= 3 \end{aligned}$$

3. Die Punkte A(3/-3/1), B(3/3/1), C(-3/3/1), D(?/?/?) bilden die Eckpunkte der quadratischen Grundfläche und S(0/0/5) die Spitze einer zur z-Achse symmetrischen Pyramide.
   (Hinweis: die Ebenengleichung der der Grundfläche ist $x_3=1$, mit dem Normalenvektor $n=(0/0/1)^T$)
   a) Geben Sie die Koordinaten des Punktes D an. (2)
   b) Berechnen Sie das Volumen der Pyramide. (2)
   c) Unter welchem Winkel schneidet eine Seitenfläche die Grundfläche? (2)
   d) Unter welchem Winkel schneidet eine Seitenkante die Grundfläche? (2)

4. Berechnen Sie $z = \sqrt[3]{\left(5\sqrt{2} + 2\sqrt{2}\,i\right) - \left(9\sqrt{2} - 2\sqrt{2}\,i\right)}$ (5)
   Geben Sie die Lösungen in der Form z=a+ib an.

5. Berechnen Sie die ersten Ableitungen von:
   a) $f_{(x)} = x^2 \cdot e^{x^2}$ (2)
   b) $f_{(x)} = \pi^{\sin(2x)-2}$ (3)

6. Bestimmen Sie alle Lösungen der Gleichung $8 \cdot \sin^2(x) - 2 = 0$ im Intervall $[0;2\pi]$ (4)
   Geben Sie die Lösungen in Grad und in Radiant an.

7. Bei einem Kegel beträgt die Summe des Grundkreisumfangs und der Höhe 100 cm. (6)
   Wie müssen Radius und Höhe gewählt werden, damit das Volumen maximal wird?

8. Wie groß ist die Fläche, die die Funktion $f_{(x)} = x^3 - 4a^2x$ mit der X-Achse einschliesst? (4)

A Lösungen:

1. det(A)= -4 $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 2{,}5 & -2 \\ 0 & 0{,}25 & -0{,}5 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

2. x_1= -3 ; x_2= -1 ; x_3= 2

3. a) D=(-3/-3/1)

b) $V = \frac{1}{3} \cdot \begin{vmatrix} 0 & -6 & -3 \\ 6 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 48$

c) E(ABS): $8x_1+6x_3=30$ cos(α)=0,6 α=53,13°

d) Richtungsvektor AS=$(-3/3/4)^T$ $\sin(\alpha) = \frac{4}{\sqrt{34}}$ α=43,31°

4. $z = \sqrt[3]{8e^{i135°}}$

$$z_1 = 2e^{i45°} = 1{,}41 + 1{,}41\,i$$
$$z_2 = 2e^{i165°} = -1{,}93 + 0{,}52\,i$$
$$z_3 = 2e^{i285°} = 0{,}52 - 1{,}93\,i$$

5. a) $f'_{(x)} = 2x \cdot e^{x^2} + x^2 \cdot e^{x^2} \cdot 2x = (2x^3 + 2x)\, e^x$

b) $f_{(x)} = e^{\ln(\pi)\cdot(\sin(2x)-2)}$ $f'_{(x)} = 2\ln(\pi)\cdot\cos(2x)\cdot\pi^{\sin(2x)-2}$

6. x = 30° , 150°, 210°, 330° bzw. 1/6 π; 5/6 π; 7/6 π;11/6 π

7. $V_{(rr,h)} = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ $2\pi r + h = 100$

$$V_{(r)} = \frac{100}{3}\pi r^2 - \frac{2}{3}\pi^2 r^3 \qquad V'_{(r)} = \frac{50}{3}\pi r - 2\pi^2 r^2 = 0$$

$$r = \frac{100}{3\pi} = 10{,}61 \qquad h = \frac{100}{6} = 33{,}33$$

8. $A = 2 \cdot \left| \int_0^{2a} (x^3 - 4a^2 x)\, dx \right| = 8\, a^4$