Exponential- und Logarithmusfunktion:

1. Eine radioaktive Substanz zerfällt exponentiell nach dem Zeitgesetz $n(t) = n_o \cdot e^{-\lambda \cdot t}$ $, t \geq 0$. Die Zerfallskonstante λ habe den Wert $2{,}0974 \cdot 10^{-6}$ s^{-1} (Radon). Nach welcher Zeit τ ist die Hälfte der Substanz zerfallen?*($3{,}305 \cdot 10^5 s$)*
2. Beim Entladen eines Kondensators C über den Widerstand R nimmt die Ladung gemäß der Gleichung $q(t) = q_o \cdot e^{-\frac{t}{R \cdot C}}$ ab. Ab wann ist die Ladung auf unter 10% ihres Anfangswertes gesunken?*(0,691 ms)* (Es sei R=100 Ohm, C=3µF)

9. Lösen Sie die folgenden Exponentialgleichungen:
   a) $e^{x^2-2x} = 2$ b) $e^x + 2e^{-x} = 3$
   (a: x_1 = -0,3012; x_2 = 2,3012 b: x_1 = 0; x_2 = 0,693)
10. Welche Lösungen besitzen die folgenden logarithmischen Gleichungen?
    a) $\ln\sqrt{x} + 1{,}5 \cdot \ln x = \ln(2x)$ b) $(\log x)^2 - \log x = 2$
    (a: 2 b: x_1 = 0,1 x_2 = 100)
11. Berechnen Sie
    ln(25) log(25) $\log_2(25)$
    (3,2189 1,3979 4,6439)

Ableitungen:

1. Von folgenden Funktionen sind die 1. und 2. Ableitungsfunktionen zu bestimmen (dabei ist jeweils der größtmögliche Definitionsbereich der Funktionen sowie der Ableitungsfunktionen anzugeben).

   a) $f: x \mapsto x^8 + 5x^4 - 3x^3 - 4$ b) $f: x \mapsto (x^2 + 3) \cdot e^x$

   c) $f: x \mapsto \dfrac{x^3 + x - 1}{x^2 - 1}$ d) $f: x \mapsto \dfrac{1}{x} \cdot \ln x$

   e) $f: x \mapsto x^2 \cdot |x|$ f) $f: x \mapsto (2x - 7)^{16}$

   g) $f: x \mapsto \ln(2x^2 + 7)$ h) $f: t \mapsto e^{-t^2}$.

Lösungen:

1. a) $f'(x) = 8x^7 + 20x^3 - 9x^2$, $f''(x) = 56x^6 + 60x^2 - 18x$, $D_0 = D_1 = D_2 = \mathbb{R}$;
   b) $f'(x) = (x^2 + 2x + 3)e^x$, $f''(x) = (x^2 + 4x + 5)e^x$, $D_0 = D_1 = D_2 = \mathbb{R}$;
   c) $f'(x) = \dfrac{x^4 - 4x^2 + 2x - 1}{(x^2 - 1)^2}$, $f''(x) = \dfrac{2(2x^3 - 3x^2 + 6x - 1)}{(x^2 - 1)^3}$, $D_0 = D_1 = D_2 = \mathbb{R}\backslash\{-1,1\}$;
   d) $f'(x) = \dfrac{1}{x^2} \cdot (1 - \ln x)$, $f''(x) = \dfrac{1}{x^3} \cdot (-3 + 2\ln x)$, $D_0 = D_1 = D_2 = \mathbb{R}^+$.
   e) Beachtet man $(|x|)' = \operatorname{sgn} x$ für $x \neq 0$ und $x \cdot \operatorname{sgn} x = |x| \Rightarrow f'(x) = 3x|x|$, $f''(x) = 6|x|$, $D_0 = D_1 = D_2 = \mathbb{R}$, die Stelle $x = 0$ muß getrennt untersucht werden;
   f) $f'(x) = 32(2x - 7)^{15}$, $f''(x) = 960(2x - 7)^{14}$, $D_0 = D_1 = D_2 = \mathbb{R}$;
   g) $f'(x) = \dfrac{4x}{2x^2 + 7}$, $f''(x) = \dfrac{4(7 - 2x^2)}{(2x^2 + 7)^2}$, $D_0 = D_1 = D_2 = \mathbb{R}$;
   h) $f'(t) = -2te^{-t^2}$, $f''(t) = -2(1 - 2t^2)e^{-t^2}$, $D_0 = D_1 = D_2 = \mathbb{R}$.