1. Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Berechnen Sie die skalaren Komponenten und die Beträge der aus ihnen gebildeten folgenden Vektoren:

a) $\vec{s}_1 = 3\,\vec{a} - 5\,\vec{b} + 3\,\vec{c}$ b) $\vec{s}_2 = -2\,(\vec{b} + 5\,\vec{c}) + 5\,(\vec{a} - 3\,\vec{b})$

c) $\vec{s}_3 = 4\,(\vec{a} - 2\,\vec{b}) + 10\,\vec{c}$ d) $\vec{s}_4 = 3\,(\vec{a}\cdot\vec{b})\,\vec{c} - 5\,(\vec{b}\cdot\vec{c})\,\vec{a}$

2. Normieren Sie die folgenden Vektoren:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = 3\,\vec{e}_x - 4\,\vec{e}_y + 8\,\vec{e}_z, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

3. Wie lautet der Einheitsvektor $\vec{e}$, der die zum Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$ *entgegengesetzte* Richtung hat?

4. Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes Q, der vom Punkte $P = (3;\ 1;\ -5)$ in Richtung des Vektors $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}$ um 20 Längeneinheiten entfernt liegt.

5. Bilden Sie mit den Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \\ -2 \end{pmatrix}$ die folgenden Skalarprodukte:

a) $\vec{a}\cdot\vec{b}$ b) $(\vec{a} - 3\,\vec{b})\cdot(4\,\vec{c})$ c) $(\vec{a} + \vec{b})\cdot(\vec{a} - \vec{c})$

6. Welchen Winkel schließen die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ miteinander ein?

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 10 \\ -5 \\ 10 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -0{,}5 \end{pmatrix}$

c) $\vec{a} = \vec{e}_x - 2\,\vec{e}_y + 5\,\vec{e}_z$, $\vec{b} = -\,\vec{e}_x - 10\,\vec{e}_z$

Lösungen:

1. a) $\vec{s}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ -20 \end{pmatrix}$, $|\vec{s}_1| = 22{,}29$ b) $\vec{s}_2 = \begin{pmatrix} 99 \\ 0 \\ -128 \end{pmatrix}$, $|\vec{s}_2| = 161{,}82$

c) $\vec{s}_3 = \begin{pmatrix} -22 \\ 18 \\ -8 \end{pmatrix}$, $|\vec{s}_3| = 29{,}53$ d) $\vec{s}_4 = \begin{pmatrix} -60 \\ -326 \\ 256 \end{pmatrix}$, $|\vec{s}_4| = 418{,}82$

2. $\vec{e}_a = \frac{1}{\sqrt{21}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}436 \\ 0{,}218 \\ 0{,}873 \end{pmatrix}$, $\vec{e}_b = \frac{1}{\sqrt{89}}\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}318 \\ -0{,}424 \\ 0{,}848 \end{pmatrix}$,

$\vec{e}_c = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}577 \\ 0{,}577 \\ -0{,}577 \end{pmatrix}$

3. $\vec{e} = -\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = -\frac{1}{\sqrt{26}}\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}196 \\ 0{,}784 \\ -0{,}588 \end{pmatrix}$

4. $\vec{r}(Q) = \vec{r}(P) + 20\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} + 2\sqrt{2}\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11{,}49 \\ -13{,}14 \\ 6{,}31 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$Q = (11{,}49;\ -13{,}14;\ 6{,}31)$

5. a) $\vec{a}\cdot\vec{b} = 1$ b) $(\vec{a} - 3\vec{b})\cdot(4\vec{c}) = 288$ c) $(\vec{a} + \vec{b})\cdot(\vec{a} - \vec{c}) = 12$

6. a) $\varphi = 79{,}92°$ b) $\varphi = 51{,}34°$ c) $\varphi = 157{,}90°$