1. Bestimmen Sie die Richtungswinkel α, β und γ der folgenden Vektoren:

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ -8 \end{pmatrix}$ c) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 11 \\ -2 \\ 10 \end{pmatrix}$

2. Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Berechnen Sie mit ihnen die folgenden Vektorprodukte:

a) $\vec{a} \times \vec{b}$ b) $(\vec{a} - \vec{b}) \times (3\ \vec{c})$

c) $(-\vec{a} + 2\ \vec{c}) \times (-\vec{b})$ d) $(2\ \vec{a}) \times (-\vec{b} + 5\ \vec{c})$

3. Bestimmen Sie den Flächeninhalt des von den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms:

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -10 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$ b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 12 \end{pmatrix}$

4. Zeigen Sie: Die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ liegen jeweils in einer gemeinsamen Ebene.

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 25 \end{pmatrix}$

b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$

5. Bestimmen Sie das Volumen des von den Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -8 \end{pmatrix}$$

gebildeten Spats.

6. Von einer Geraden g ist der Punkt $P_1 = (4;\ 2;\ 3)$ und der Richtungsvektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ bekannt. Berechnen Sie den Abstand des Punktes $Q = (4;\ 1;\ 1)$ von dieser Geraden.

Lösungen:

1. a) $\alpha = 39{,}51°$, $\beta = 81{,}12°$, $\gamma = 51{,}89°$
   b) $\alpha = 107{,}64°$, $\beta = 59{,}66°$, $\gamma = 143{,}91°$
   c) $\alpha = 42{,}83°$, $\beta = 97{,}66°$, $\gamma = 48{,}19°$

2. a) $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -14 \\ -9 \end{pmatrix}$ b) $(\vec{a} - \vec{b}) \times (3\vec{c}) = \begin{pmatrix} 93 \\ 9 \\ -6 \end{pmatrix}$

   c) $(-\vec{a} + 2\vec{c}) \times (-\vec{b}) = \begin{pmatrix} -12 \\ -26 \\ -1 \end{pmatrix}$ d) $(2\vec{a}) \times (-\vec{b} + 5\vec{c}) = \begin{pmatrix} 236 \\ -2 \\ 38 \end{pmatrix}$

3. a) $A = |\vec{a} \times \vec{b}| = 48{,}89$ b) $A = |\vec{a} \times \vec{b}| = 51{,}16$

4. Die drei Vektoren sind *komplanar*, wenn ihr Spatprodukt *verschwindet*. Dies ist in beiden Teilaufgaben der Fall.

5. $V_{\text{Spat}} = |[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}]| = 75$

6. $d = \dfrac{|\vec{a} \times (\vec{r}_Q - \vec{r}_1)|}{|\vec{a}|} = 1{,}22$