1. Welche *Lage* besitzen die folgenden Geradenpaare g_1, g_2 zueinander? Bestimmen Sie *gegebenenfalls* Abstand, Schnittpunkt und Schnittwinkel.

a) g_1 durch $P_1 = (3;\ 4;\ 6)$ und $P_2 = (-1;\ -2;\ 4)$
g_2 durch $P_3 = (3;\ 7;\ -2)$ und $P_4 = (5;\ 15;\ -6)$

b) $$g_1:\ \vec{r}(\lambda_1) = \vec{r}_1 + \lambda_1\,\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$g_2:\ \vec{r}(\lambda_2) = \vec{r}_2 + \lambda_2\,\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ -9 \end{pmatrix}$$

2. Welche Lage haben Gerade g und Ebene E zueinander? Bestimmen Sie *gegebenenfalls* Abstand, Schnittpunkt und Schnittwinkel.

a) g durch $P_1 = (5;\ 1;\ 2)$ mit dem Richtungsvektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

E durch $P_0 = (2;\ 1;\ 8)$ mit dem Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) $$g:\ \vec{r}(\lambda) = \vec{r}_1 + \lambda\,\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$E:\ \vec{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \\ z-1 \end{pmatrix} = 0$$

3. Zeigen Sie die *Parallelität* der beiden Ebenen E_1 und E_2 und berechnen Sie ihren Abstand:

E_1 durch $P_1 = (3;\ 5;\ 6)$ mit dem Normalenvektor $\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

E_2 durch $P_2 = (1;\ 5;\ -2)$ mit dem Normalenvektor $\vec{n}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ -9 \\ 6 \end{pmatrix}$

4. Bestimmen Sie die Schnittgerade und den Schnittwinkel der beiden Ebenen:

$$E_1:\ \vec{n}_1 \cdot (\vec{r} - \vec{r}_1) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-2 \\ y-5 \\ z-6 \end{pmatrix} = 0$$

$$E_2:\ \vec{n}_2 \cdot (\vec{r} - \vec{r}_2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-1 \\ y-5 \\ z-1 \end{pmatrix} = 0$$

Lösungen:

1. a) g_1 und g_2 sind windschief d = 2,04 b) parallel d = 1,79

2. a) Gerade g und Ebene E *schneiden* sich wegen $\vec{n} \cdot \vec{a} = 2 \neq 0$ in einem Punkt S.

Schnittpunkt ($\lambda_S = 4{,}5$): $\vec{r}_S = \vec{r}_1 + \left(\dfrac{\vec{n} \cdot (\vec{r}_0 - \vec{r}_1)}{\vec{n} \cdot \vec{a}}\right)\vec{a} = \begin{pmatrix} 18{,}5 \\ 5{,}5 \\ 11 \end{pmatrix} \Rightarrow S = (18{,}5;\ 5{,}5;\ 11)$

Schnittwinkel: $\varphi = \arcsin\left(\dfrac{\vec{n} \cdot \vec{a}}{|\vec{n}| \cdot |\vec{a}|}\right) = 9{,}27°$

b) Gerade g und Ebene E sind *parallel*, da $\vec{n} \cdot \vec{a} = 0$ ist. Ihr Abstand beträgt

$$d = \frac{|\vec{n} \cdot (\vec{r}_1 - \vec{r}_0)|}{|\vec{n}|} = 1{,}51$$

3. parallell da Normalenvektoren Vielfache d = 3,74

4. *Schnittgerade* g: $\vec{r}(\lambda) = \vec{r}_0 + \lambda\,\vec{a}$; $\vec{a} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix}$

Schnittwinkel: $\varphi = \arccos\left(\dfrac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}\right) = 27{,}20°$